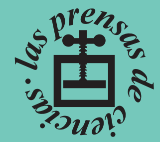
Curso de geometría diferencial

Parte 1. Curvas y superficies

Óscar A. Palmas Velasco
J. Guadalupe Reyes Victoria



Este libro es producto de varios cursos de Geometría Diferencial impatidos por los autores a lo largo de varios años, tanto a los estudiantes de las licenciaturas de Matemáticas y Física en la Facultad de Ciencias de la UNAM, como a los de la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa. La presentación es diferente a la de los cursos clásicos debido a las propias necesidades de nuestras licenciaturas.

Cabe mencionar que este documento está inspirado en varias fuentes y escuelas de geometría, destacando por un lado la escuela rusa plasmada en los libros clásicos de Pogorelov y Dubrovin, Novikov y Fomenko y por otro lado, la escuela brasileña desarrollada principalmente por Do Carmo.

No olvidamos mencionar los cinco volúmenes clásicos de Spivak, donde los lectores podrán encontrar algunas de las fuentes originales para los conceptos que aquí se muestran. Los demás textos mencionados a lo largo del trabajo también han sido igualmente importantes para la elaboración de este libro.





Óscar Palmas Velasco
J. Guadalupe Reyes Victoria

CURSO DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Parte 1. Curvas y superficies

Facultad de Ciencias, UNAM



Curso de geometría diferencial
Parte 1. Superficies y curvas
1ª edición, 2005
1ª reimpresión, 2008

Diseño de portada: Laura Uribe

D. R. Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Circuito exterior s/n. Ciudad Universitaria
México 04510, D. F.
editoriales@ciencias.unam.mx

ISBN: 970-32-2650-7

Impreso y hecho en México

Prefacio

Este libro es producto de varios cursos de Geometría Diferencial impartidos por los autores a lo largo de varios años, a los estudiantes de las licenciaturas de Matemáticas y Física, tanto en la Facultad de Ciencias de la UNAM, como en la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa. La presentación responde, por tanto, a las necesidades de nuestras licenciaturas. Esta obra puede emplearse para un curso de Geometría Diferencial I impartido a lo largo de un semestre o bien de un trimestre.

En el Capítulo 0 se introduce la geometría del espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$ y se mencionan los elementos necesarios (productos escalar y vectorial, norma, etcétera) para estudiar a las curvas y a las superficies contenidas en una región del espacio. El lector interesado en una discusión más amplia de estos resultados puede consultar Becerril et al. [2], de donde se han extraído tales elementos básicos. En este capítulo se estudian además los cambios de coordenadas de una región en $\mathbb{R}^3$.

En el capítulo 1 se analizan las curvas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, introduciendo dos funciones características básicas: la **curvatura** y la **torsión**. Con base en estas funciones se establece una relación de equivalencia entre las curvas.

A partir del capítulo 2 se inicia el estudio de las superficies con los conceptos básicos de esta teoría. En el capítulo 3 se hace una clasificación de las superficies en términos métricos y locales, utilizando varios conceptos fundamentales de la geometría diferencial, destacando entre ellos la **curvatura gaussiana**. En este capítulo se demuestra además uno de los teoremas más importantes de la matemática moderna: el teorema **egregio de Gauss**.

Cabe mencionar que esta obra se ha inspirado en varias fuentes y escuelas de geometría, destacando por un lado la escuela rusa plasmada en los libros clásicos de Pogorelov [9] y Dubrovin, Novikov y Fomenko [4], [5] y por

otro lado la escuela brasileña desarrollada principalmente por do Carmo [3]. No olvidamos mencionar los cinco volúmenes clásicos de Spivak [10], donde los lectores podrán encontrar algunas de las fuentes originales para los conceptos que aquí se muestran. Los demás textos mencionados a lo largo del trabajo también han sido igualmente importantes para la elaboración de este libro.

La notación utilizada en la obra es la que se usa en la literatura matemática comúnmente. Por ejemplo, la notación $\cap$, que denota la operación de intersección de dos o más conjuntos, $\cup$ para la unión, etcétera. Al discutir un ejemplo, el proceso concluye con el símbolo $\triangleright$. La demostración de un resultado concluye con el símbolo $\square$.

Esta obra fue realizada mientras el primer autor disfrutó de una estancia sabática en la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. Agradecemos el apoyo del Dr. Carlos Signoret, jefe del Departamento de Matemáticas, para la realización de este proyecto. Igualmente, agradecemos al Comité Editorial de la Facultad de Ciencias de la UNAM, por el apoyo brindado para la publicación de la obra. Por último, agradecemos el apoyo técnico de Daniel Espinosa y Víctor Cruz. Ponemos a disposición de los lectores nuestras direcciones de correo electrónico para cualquier comunicación en torno de esta obra.

Oscar Palmas
opv@hp.fciencias.unam.mx

J. Guadalupe Reyes
revg@xanum.uam.mx

Prefacio a la segunda edición

Después de la aparición de la primera edición de este trabajo, algunos lectores hicieron de nuestro conocimiento algunas sugerencias acerca de éste. Por ejemplo, antes usamos el corchete $[,]$ para denotar al producto vectorial en $\mathbb{R}^3$; atendiendo a las opiniones y sugerencias de nuestros lectores, hemos realizado el cambio de notación al símbolo $\times$ para facilitar la interacción literaria de este trabajo con obras escritas en la misma dirección.

En general, acorde a las opiniones de profesores y estudiantes, se han aclarado y corregido varios resultados y conceptos a lo largo de todo el libro. Además, se han realizado cambios significativos en la mayoría de las figuras con el afán de ilustrar mejor los objetos a que corresponden. Lo anterior se ha efectuado buscando mantener la esencia del trabajo original y la idea objetiva para la cual fue escrito.

Agradecemos a los lectores de esa primera edición el tiempo invertido para realizar sus comentarios y sugerencias así como su interés por mejorarla.

Los autores

Contenido

Capítulo 0

Conceptos preliminares

En este capítulo, que puede considerarse como introductorio, revisamos los elementos necesarios para poder describir a los entes geométricos que serán nuestro objeto de estudio. Aunque es probable que el lector conozca estos conceptos por los cursos de geometría analítica, álgebra lineal y cálculo, los incluiremos para una fácil referencia. No obstante, una discusión más profunda puede encontrarse en [2].

0.1 La geometría de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$

En esta obra estudiaremos objetos geométricos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, los espacios vectoriales de dimensión dos y tres, respectivamente, con coeficientes en los números reales. Para describir los mencionados objetos, se asocia a estos espacios un **sistema de coordenadas**. Dicho sistema puede pensarse como un marco de referencia que surge de la necesidad de un observador para describir un proceso.

El espacio cartesiano

Un **sistema de coordenadas** en $\mathbb{R}^3$ asocia a cada punto $p \in \mathbb{R}^3$ una colección de tres números de manera biunívoca. Esto es, dado un punto en el espacio, le asociamos de forma única una colección de números reales x^1, x^2, x^3 que lo identifique dentro de ese sistema de coordenadas. De igual forma, dada una triada de números x^1, x^2, x^3, a ésta se le asocia en forma única un punto p de $\mathbb{R}^3$. Esta asociación se escribe como $p = (x^1, x^2, x^3) \in$

$\mathbb{R}^3$. Los números reales x^1, x^2, x^3 se llamarán las **coordenadas** del punto p en tal sistema.

Una manera de asociar coordenadas a los puntos de $\mathbb{R}^3$ utiliza una base $\{e_1, e_2, e_3\}$. Como sabemos del álgebra lineal, todo punto $p \in \mathbb{R}^3$ se escribe en forma única como

$$p = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3,$$

para una colección bien determinada de números x^1, x^2, x^3, que son las coordenadas de p.

Consideremos en particular la **base canónica**[1]

$$e_1 = (1, 0, 0); \quad e_2 = (0, 1, 0); \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

En este caso denotaremos a las coordenadas de un punto como

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z,$$

y llamaremos a éstas las **coordenadas cartesianas** del punto p. De la misma forma, el espacio $\mathbb{R}^3$ con este sistema de coordenadas se llamará el **espacio cartesiano**.

Producto escalar

Usaremos el concepto de producto escalar como base para desarrollar la geometría de $\mathbb{R}^3$.

Definición 0.1. Dados los vectores ξ, η en el plano cartesiano $\mathbb{R}^3$, sean (ξ^1, ξ^2, ξ^3) y (η^1, η^2, η^3) sus coordenadas con respecto de la base canónica. El **producto escalar** de ξ y η, denotado por $\langle \xi, \eta \rangle$, se define como el número

$$\langle \xi, \, \eta \rangle = \xi^1 \eta^1 + \xi^2 \eta^2 + \xi^3 \eta^3 = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \, \eta^i.$$

También es usual llamar al producto escalar como **producto punto**, **interior** o **interno**, así como usar la notación $\xi \cdot \eta$.

[1]En algunos contextos también se denota como i, j, k a estos vectores.

Proposición 0.2 (Propiedades del producto escalar)**.** *Dados los vectores ξ, η, ζ en $\mathbb{R}^3$ y los números reales λ, μ, se cumple:*

a. $\langle \lambda\xi + \mu\zeta,\, \eta \rangle = \lambda \langle \xi,\, \eta \rangle + \mu \langle \zeta, \eta \rangle$.

b. $\langle \xi,\, \eta \rangle = \langle \eta,\, \xi \rangle$.

c. $\langle \xi,\, \xi \rangle \geq 0$ *para todo* ξ *y* $\langle \xi,\, \xi \rangle = 0$ *si y sólo si* $\xi = 0$.

Estas propiedades nos dicen que el producto escalar es una *forma bilineal simétrica positiva definida.*

Las propiedades del producto escalar dadas en la proposición 0.2 permiten definir varios conceptos geométricos, que repasaremos a continuación.

Definición 0.3. Dado un vector ξ con coordenadas (ξ^1, ξ^2, ξ^3) respecto de la base canónica, la **norma** de ξ, denotada $\|\xi\|$, se define como

$$\|\xi\| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi^i)^2}.$$

No es difícil comprobar que son válidas las siguientes propiedades de la norma.

Proposición 0.4. *Para los vectores $\xi, \eta \in \mathbb{R}^3$ y los escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se tiene que*

a. $\|\lambda\, \xi\| = |\lambda|\, \|\xi\|$.

b. *Si* $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ *entonces* $\|\xi + \eta\| = \|\xi - \eta\|$. *En tal caso, los vectores ξ y η se llamarán* **perpendiculares***.*

c. **Teorema de Pitágoras:** *ξ y η son perpendiculares si y sólo si*

$$\|\xi + \eta\|^2 = \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2.$$

(Véase la figura 0.1a.)

d. **Desigualdad de Schwarz:**

$$|\langle \xi, \eta \rangle| \leq \|\xi\|\, \|\eta\|.$$

La igualdad es válida si y sólo si uno de los vectores es múltiplo del otro.

e. Desigualdad del triángulo:

$$\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|.$$

La igualdad es válida si y sólo si uno de los vectores es múltiplo del otro; véase la figura 0.1b.

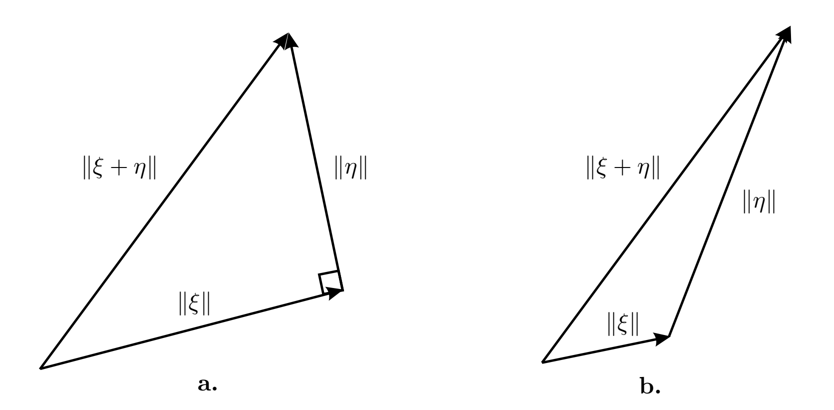


Figura 0.1: **a.** Teorema de Pitágoras. **b.** Desigualdad del triángulo.

Definición 0.5. Dados dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^3$ con coordenadas (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) respecto de la base canónica, se define la **distancia** d entre p y q, denotada $d(p, q)$, como

$$d(p, q) = \sqrt{\langle p - q,\, p - q \rangle} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

De las propiedades del producto escalar y de la norma se obtienen las siguientes

Proposición 0.6 (Propiedades de la distancia)**.** *Sean p, q, r puntos en $\mathbb{R}^3$. Entonces se cumple:*

a. $d(p, q) = d(q, p)$.

b. *$d(p,q) \geq 0$, y $d(p,q) = 0$ si y sólo si $p = q$.*

c. Desigualdad del triángulo:

$$d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q).$$

La igualdad es válida si y sólo si p, q y r son colineales.

Observación. Al espacio $\mathbb{R}^3$ dotado de la distancia dada en la definición 0.5 se llama también **espacio euclidiano**.

Un vector $\xi \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|\xi\| = 1$ se llamará **vector unitario**. Dado un vector $\eta \in \mathbb{R}^3$ no nulo, se garantiza la construcción del vector unitario

$$\xi = \frac{\eta}{\|\eta\|}.$$

Si ξ y η son dos vectores en $\mathbb{R}^3$, el **ángulo** θ entre ellos se define mediante la igualdad

$$\cos\theta = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{\sqrt{\langle \xi, \eta \rangle \langle \eta, \eta \rangle}} = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{\|\xi\| \, \|\eta\|},$$

donde $0 \leq \theta \leq \pi$. En otras palabras, el producto escalar de los vectores ξ y η se puede escribir como

$$\langle \xi, \eta \rangle = \|\xi\| \, \|\eta\| \cos\theta.$$

Dados los vectores ξ unitario y η arbitrario, definimos la proyección de η en ξ como $\langle \xi, \eta \rangle \xi$, que es un vector con la misma dirección que ξ. (Véase la figura 0.2.) En general, la **proyección** del vector η arbitrario en el vector no nulo ξ se calcula mediante la fórmula

$$\frac{\langle \xi, \eta \rangle}{\|\xi\|^2} \xi.$$

0.2 Orientación

La idea básica de orientación del espacio alude a la **regla de la mano derecha** utilizada en la Mecánica, mientras que la orientación del plano

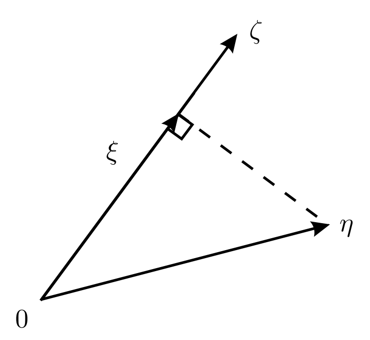


Figura 0.2: Proyección de un vector.

toma en cuenta el movimiento de las manecillas del reloj. Se darán sólo algunos aspectos básicos de estos conceptos.

La orientación canónica del espacio cartesiano $\mathbb{R}^3$ está dada por la elección de la base canónica ordenada $\{e_1, e_2, e_3\}$, de modo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

tiene determinante positivo; de hecho, $\det A = 1$. (Véase la figura 0.3a.)

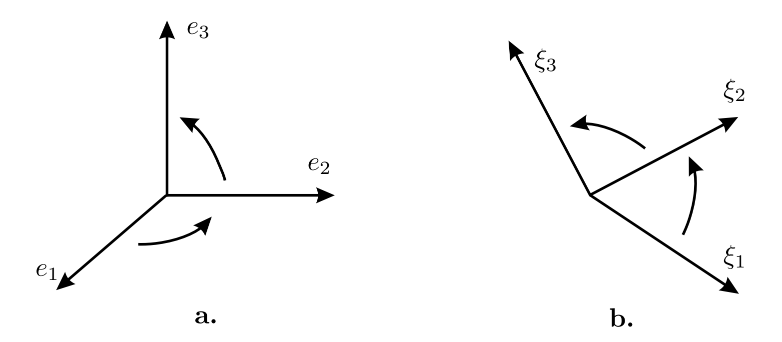


Figura 0.3: **a.** Base canónica, con orientación positiva. **b.** Base con orientación positiva.

En general, si consideramos una base $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ y la matriz de cambio de base B entre ésta y la base canónica, sabemos que $\det B \neq 0$. Diremos que la base $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ tiene orientación positiva si la matriz B tiene determinante positivo; en caso contrario diremos que tiene orientación negativa. (Véase la figura 0.3b.)

Dada una transformación lineal biyectiva $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, los vectores $T(e_i) = \xi_i$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. La matriz asociada a T tiene como columnas a los vectores ξ_i; es decir,

$$B = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Si $\det B > 0$, entonces se dice que T preserva la orientación de $\mathbb{R}^3$. Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 0.7. Una transformación lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

preserva la orientación de $\mathbb{R}^3$ si su matriz asociada con respecto de la base canónica tiene determinante positivo. En caso contrario, se dice que T **invierte la orientación** de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 0.8. *Consideremos la transformación lineal* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada en coordenadas cartesianas por*

$$T(x, y, z) = (3x + 2y + 2z,\ x + 3y + z,\ 5x + 3y + 4z)$$

Con respecto de la base canónica, T tiene asociada a la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ya que $\det B = 4$, *se sigue que T preserva la orientación de $\mathbb{R}^3$.* ▷

Ejemplo 0.9. *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por*

$$T(x, y) = (y, x).$$

Con respecto de la base canónica, T tiene asociada a la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\det B = -1$, *T invierte la orientación de $\mathbb{R}^2$.* ▷

0.3 Operaciones vectoriales en $\mathbb{R}^3$

En esta sección revisaremos dos operaciones vectoriales muy importantes, el producto cruz y el triple producto escalar.

Producto cruz

Definición 0.10. Sean $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, $\eta = (\eta^1, \eta^2, \eta^3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Se define el **producto cruz** o **producto vectorial** de ξ con η, denotado por $\xi \times \eta$, como el vector con coordenadas

$$\xi \times \eta = (\xi^2\eta^3 - \eta^2\xi^3,\ -(\xi^1\eta^3 - \eta^1\xi^3),\ \xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1)$$

con respecto de la base canónica.

Para recordar las coordenadas del producto cruz conviene escribir a éste de la manera siguiente:

$$\xi \times \eta = e_1 \begin{vmatrix} \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^2 & \eta^3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^2 \\ \eta^1 & \eta^2 \end{vmatrix},$$

lo que podemos escribir como un "determinante",

$$\xi \times \eta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 \end{vmatrix}.$$

Proposición 0.11 (Propiedades del producto cruz)**.** *Dados los vectores ξ, η, ζ en $\mathbb{R}^3$ y los escalares λ, $\mu \in \mathbb{R}$ se tiene que*

a. *Si θ es el ángulo entre ξ y η, entonces*

$$\|\xi \times \eta\| = \|\xi\|\ \|\eta\| \operatorname{sen} \theta.$$

b. *$\xi \times \eta$ es ortogonal a ξ y η:*

$$\langle \xi \times \eta, \xi \rangle = 0 \quad y \quad \langle \xi \times \eta, \eta \rangle = 0.$$

c. *Anticonmutatividad:*

$$\xi \times \eta = -\eta \times \xi.$$

d. *Se cumplen las igualdades*

$$(\lambda\xi) \times \eta = \xi \times (\lambda\eta) = \lambda(\xi \times \eta).$$

e. *Distributividad:*

$$(\lambda\xi + \mu\zeta) \times \eta = \lambda(\xi \times \eta) + \mu(\zeta \times \eta).$$

f. *Igualdad de Jacobi:*

$$(\xi \times (\eta \times \zeta)) + (\zeta \times (\xi \times \eta)) + (\eta \times (\zeta \times \xi)) = 0.$$

La propiedad (b) en la proposición 0.11 implica que si dos vectores no nulos ξ, η satisfacen que su producto cruz es el vector cero, entonces

$$0 = \|(0,0,0)\| = \|\xi \times \eta\| = \|\xi\| \, \|\eta\| \operatorname{sen} \theta$$

lo que implica a su vez que $\theta = 0$ o bien $\theta = \pi$. Esto es, dos vectores son **paralelos** si su producto cruz se anula.

Se observa que si $\xi \times \eta \neq 0$, entonces los vectores unitarios

$$\left\{ \frac{\xi}{\|\xi\|}, \frac{\eta}{\|\eta\|}, \frac{\xi \times \eta}{\|\xi \times \eta\|} \right\}$$

conforman una base en el espacio con orientación positiva por la elección del producto $\xi \times \eta$. (Véase la figura 0.4.)

Triple producto escalar

Definición 0.12. Dados los vectores ξ, η, ζ en $\mathbb{R}^3$ se define su **triple producto escalar**, también llamado producto mixto, como el número real denotado por (ξ, η, ζ) y dado por

$$(\xi, \eta, \zeta) = \langle \xi \times \eta, \zeta \rangle.$$

Proposición 0.13 (Propiedades del triple producto escalar)**.** *Dados los vectores $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3), \eta = (\eta^1, \eta^2, \eta^3)$ y $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ en $\mathbb{R}^3$, se tiene que*

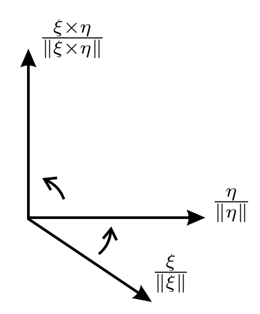


Figura 0.4: Orientación positiva.

a. *El triple producto escalar de ξ, η y ζ se calcula mediante el determinante formado por las coordenadas de los vectores correspondientes:*

$$(\xi, \eta, \zeta) = \begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 \\ \zeta^1 & \zeta^2 & \zeta^3 \end{vmatrix}.$$

b. *El triple producto escalar no cambia si se hacen permutaciones circulares; es decir,*

$$(\xi, \eta, \zeta) = (\zeta, \xi, \eta) = (\eta, \zeta, \xi).$$

c. *El triple producto escalar es anticonmutativo al transponer dos vectores. Por ejemplo,*

$$(\xi, \eta, \zeta) = -(\eta, \xi, \zeta).$$

d. $(\xi, \eta, \zeta) = 0$ *si y sólo si los tres vectores y el origen están contenidos en un mismo plano.*

e. *El volumen V del paralelepípedo generado sobre los vectores ξ, η y ζ se calcula mediante la igualdad*

$$V = |(\xi, \eta, \zeta)|.$$

0.4 Topología

Podemos utilizar los conceptos geométricos (como la norma, la distancia, los ángulos, entre otros) para definir ciertos subconjuntos distinguidos en el plano y el espacio. De nuevo, enunciaremos las definiciones para el caso de $\mathbb{R}^3$, pero el lector podrá establecer con facilidad las definiciones correspondientes en el plano.

Definición 0.14. Sean $p \in \mathbb{R}^3$ y $A \subseteq \mathbb{R}^3$.

a. Una **bola** con centro en el punto $p \in \mathbb{R}^3$ y radio $\epsilon > 0$, denotada $B(p, \epsilon)$, es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ cuya distancia a p es menor que ϵ; en símbolos,

$$B(p, \epsilon) = \{\, q \in \mathbb{R}^3 \mid d(p, q) < \epsilon \,\}.$$

b. p es un **punto interior** de A si y sólo si existe un número positivo $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \subset A$.

c. p es un **punto frontera** de A si y sólo si para cualquier número positivo $\epsilon > 0$ existe un punto $q \in A \cap B(p, \epsilon)$ y un punto $r \in (\mathbb{R}^3 \setminus A) \cap B(p, \epsilon)$.

A continuación definimos las clases de conjuntos más importantes desde el punto de vista del cálculo.

Definición 0.15. Sean A, Ω, Λ subconjuntos de $\mathbb{R}^3$.

a. Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es **abierto** si y sólo si para cada punto $p \in \Omega$ existe un número positivo $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \subset \Omega$.

b. Un conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ es **cerrado** si su complemento $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \Lambda$ es abierto.

c. La **cerradura** de A, denotada $\bar{A}$, es el conjunto formado por la unión de A con el conjunto de sus puntos frontera.

Usaremos esta definición para dar una nueva e importante clase de conjuntos.

Definición 0.16. Sean $A, B, \Omega, \Lambda \subseteq \mathbb{R}^3$. Entonces:

a. A es **disconexo** si y sólo si existe un par de conjuntos abiertos Ω_1, Ω_2, ajenos y no vacíos, tales que $A \cap \Omega_1 \neq \varnothing$, $A \cap \Omega_2 \neq \varnothing$ y $A \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$.

b. B es **conexo** si y sólo si no es disconexo.

c. Ω es una **región** en $\mathbb{R}^3$ si y sólo si es un conjunto abierto conexo.

d. Λ es una **región con frontera** en $\mathbb{R}^3$ si y sólo si Λ es la cerradura de una región Ω.

De la terminología del cálculo avanzado, podemos decir que una región es un conjunto abierto de una sola pieza. (Véase la figura 0.5.)

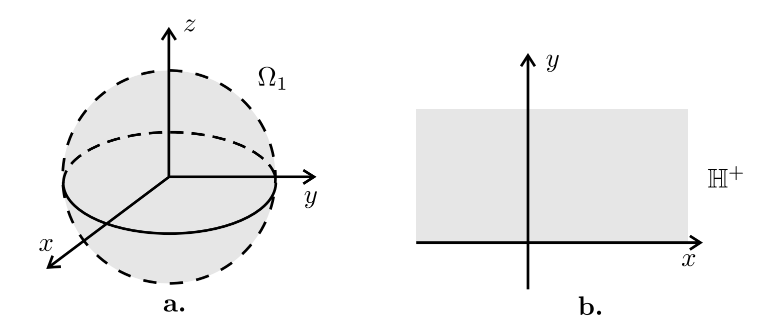


Figura 0.5: Regiones en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 0.17. *Considérese cualquier función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua. Entonces, dado un valor $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto*

$$F^{-1}(-\infty, \lambda) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) < \lambda \}$$

es un conjunto abierto, mientras que su cerradura

$$F^{-1}(-\infty, \lambda] = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) \leq \lambda \}$$

es un conjunto cerrado. El lector puede verificar esto en forma directa a partir de la definición.

Para ilustrar esto, sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *la función con regla de correspondencia* $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. *Ya que* F *es una función continua, se tiene que la* **bola unitaria**

$$F^{-1}(-\infty, 1) = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1 \}$$

es una región de $\mathbb{R}^3$. *(Véase la figura 0.5a.)*

En forma análoga, la bola cerrada

$$F^{-1}(-\infty, 1] = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$$

es una región con frontera. ▷

Ejemplo 0.18. *Consideremos el semiplano superior de* $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{H}^+ = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}.$$

Este conjunto es abierto en $\mathbb{R}^2$*; puede expresarse como* $F^{-1}(0, \infty)$, *donde* F *es la función continua* $F(x, y) = y$. *(Véase la figura 0.5b.) Su cerradura*

$$\overline{\mathbb{H}^+} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \}$$

es una región con frontera. ▷

A continuación definimos los conceptos topológicos correspondientes a un subconjunto *arbitrario* de $\mathbb{R}^3$.

Definición 0.19. Sean A un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^3$ y p un punto de A. Entonces

- **a.** Un **conjunto abierto (relativo)** en A es un conjunto que puede expresarse como la intersección de A con un conjunto abierto en $\mathbb{R}^3$.

- **b.** Una **vecindad (relativa)** de p en A es un conjunto abierto (relativo) en A que contiene a p.

Por lo general omitiremos el adjetivo "relativo", cuando esto no se preste a confusiones.

Ejemplo 0.20. *Sea $R > 0$ un número real. El conjunto*

$$\mathbb{S}^2_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

es la **esfera** *de radio R y centro en el origen de coordenadas. Si $R = 1$, decimos que la esfera es* **unitaria** *y la denotaremos simplemente como $\mathbb{S}^2$.*

Al tomar el conjunto abierto Ω consistente de los puntos en el espacio que no están contenidos en el semieje positivo z, se sigue que

$$U = \Omega \cap \mathbb{S}^2_R$$

es una vecindad para cualquier punto $p \in \mathbb{S}^2_R \setminus \{(0, 0, R)\}$. ▷

0.5 Cálculo diferencial

Supondremos que el lector está familizarizado con los conceptos del cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$, de modo que en esta sección sólo fijaremos la terminología y la notación correspondientes al cálculo.

Si una región Ω tiene coordenadas (x^1, x^2, x^3) con respecto de la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ y las funciones coordenadas de una transformación $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ son (f_1, f_2, f_3), entonces la **derivada parcial (de primer orden)** de f_i con respecto de x^j, $i, j = 1, 2, 3$, denotada por $\partial f_i / \partial x^j$, está dada por

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(p + te_j) - f_i(p)}{t}.$$

Suponiendo que estas derivadas parciales existen en una región Ω, podemos considerar las **derivadas parciales de segundo orden**

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^j \partial x^k}, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Si éstas existen, podemos considerar las derivadas parciales de orden 3, etcétera.

Definición 0.21. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ una transformación definida en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Entonces

a. f es de **clase** C^0 en $p \in \Omega$ si y sólo si f es continua en p.

b. Si $r \in \mathbb{N}$, decimos que f es de **clase** C^r en p si y sólo si existen todas las derivadas parciales de orden menor o igual a r en p, y además éstas son continuas en p.

c. f es **diferenciable** o de **clase** C^∞ en p si y sólo si f es de clase C^r en p para toda $r \in \mathbb{N}$.

Observación. En toda esta obra utilizaremos la palabra *diferenciable* como sinónimo de C^∞. Ésta es una práctica común en geometría, ahorrando así las discusiones sobre la clase de diferenciabilidad necesaria para uno u otro resultado.

Ahora extenderemos las definiciones anteriores al caso de subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}^3$. Utilizaremos las siguientes definiciones con frecuencia en el resto de esta obra.

Definición 0.22. Sean A un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^3$, $p \in A$, $f : A \to \mathbb{R}^3$ una transformación definida en A y $r \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Entonces:

a. f es de **clase** C^r **en** p si y sólo si existe una vecindad V de p en $\mathbb{R}^3$ y una transformación $F : V \to \mathbb{R}^3$ de clase C^r en p tal que

$$F(q) = f(q) \quad \text{para todo } q \in V \cap A.$$

En este caso, decimos que F es una **extensión** de f de la clase correspondiente.

b. f es de clase C^r en A si y sólo si f es de clase C^r en p para todo $p \in A$.

Ejemplo 0.23. *Sea A cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^3$ y consideremos la transformación de proyección de A sobre el plano xy, dada por $\pi_A(x, y, z) = (x, y)$. Entonces ésta es una transformación diferenciable en cualquier punto p de A, pues la proyección $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una extensión diferenciable de π_A al abierto $V = \mathbb{R}^3$.* ▷

Las transformaciones que damos a continuación permiten definir clases de equivalencia entre los subconjuntos del espacio.

Definición 0.24. Sea $f : A \to \mathbb{R}^3$ definida en un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^3$. Entonces:

a. f es un **homeomorfismo** si y sólo si f es invertible y tanto f como f^{-1} son continuas.

b. Sea $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. f es un **difeomorfismo de clase** C^r si y sólo si f es invertible y tanto f como f^{-1} son de clase C^r.

Si existe un difeomorfismo (homeomorfismo) de A sobre B, diremos que A y B son conjuntos **difeomorfos** (**homeomorfos**). Es fácil ver que la relación "A es difeomorfo (homeomorfo) a B" es una relación de equivalencia entre subconjuntos de $\mathbb{R}^3$.

Definición 0.25. Sea $r \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Una transformación $f : A \to \mathbb{R}^3$ definida en un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ es un **difeomorfismo local de clase** C^r si y sólo si para cada punto $p \in A$ existe una vecindad (relativa) A' de p en A tal que $f|A'$ es un difeomorfismo de clase C^r.

0.6 Función inversa y función implícita

Los resultados del cálculo diferencial que serán nuestra herramienta fundamental son los teoremas de la función inversa y de la función implícita, que enunciamos a continuación. Aunque estos teoremas son válidos en un contexto más general, los enunciaremos de una manera particular que nos será de utilidad más adelante. El lector interesado en profundizar en estos temas es referido a [2] o [8].

Teorema 0.26 (De la función inversa). *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ una transformación de clase C^1 definida en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y sea $p \in \Omega$ un punto con la propiedad de que la* **matriz derivada**

$$Df_p = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(p) \right),$$

formada por las derivadas parciales evaluadas en p, es invertible. Entonces existe una región $\Omega' \subset \Omega$ que contiene a p tal que

$$f|\Omega' : \Omega' \to f(\Omega')$$

es invertible. Además, f^{-1} es de clase C^1 y la matriz derivada de f^{-1} en $f(p)$ es la inversa de la matriz anterior, es decir,

$$D(f^{-1})_{f(p)} = (Df_p)^{-1}.$$

Así, la conclusión del teorema 0.26 se puede parafrasear diciendo que $f|\Omega'$ es un difeomorfismo (de clase C^1).

Corolario 0.27. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ una transformación de clase C^1 definida en Ω tal que la matriz derivada Df_p es invertible para cada $p \in \Omega$. Entonces f es un difeomorfismo local de clase C^1.*

El segundo resultado que tomaremos del cálculo es el siguiente.

Teorema 0.28 (De la función implícita)**.** *Sea $F : V \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 definida en una región $V \subset \mathbb{R}^3$, $p = (x_0, y_0, z_0)$ un punto en V y $F(p) = a$. Supongamos que*

$$\frac{\partial F}{\partial z}(p) \neq 0.$$

Bajo estas condiciones, existen una vecindad Ω de (x_0, y_0) en $\mathbb{R}^2$ y una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que (x, y, z) está en $V \cap F^{-1}(a)$ si y sólo si $z = f(x, y)$.

0.7 Sistemas de coordenadas

En muchas ocasiones, el sistema de coordenadas cartesianas no es adecuado para describir ciertos objetos geométricos en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, pues las ecuaciones o fórmulas correspondientes pueden ser complejas o incluso inmanejables. Por eso, es preciso utilizar otras coordenadas que describan tales objetos con fórmulas más simples. Por supuesto, si se van a utilizar coordenadas distintas a las cartesianas, justo es que se establezca una relación entre ambas, es decir, una manera de traducir unas coordenadas en otras. Por lo general, esta relación no puede establecerse para todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, sino sólo en ciertas regiones de éstos.

Ejemplo 0.29 (Coordenadas polares)**.** *Consideremos en el plano $\mathbb{R}^2$ el sistema de coordenadas cartesianas (x, y). Introducimos un nuevo sistema de coordenadas (r, ϕ), donde $r \geq 0$ y $\phi \in (0, 2\pi)$. La relación entre los sistemas de coordenadas es*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi, \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\phi. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Recordemos que el sistema de coordenadas polares tiene algunos problemas. En primer lugar, no todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ tienen asociado un par de coordenadas polares. Como se ve en el sistema (0.1), no hemos definido las coordenadas polares de los puntos en la parte positiva del eje x. En segundo lugar, si permitimos que ϕ asuma valores arbitrarios, entonces un punto tendrá más de un par de coordenadas; por ejemplo, $r = 1, \phi = \pi/2$ y $r = 1, \phi = 5\pi/2$ describen a un mismo punto. Más adelante daremos un criterio general para determinar cuándo tenemos un sistema de coordenadas "adecuado", es decir, cuándo existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de una región del plano y sus coordenadas correspondientes. ▷

Ejemplo 0.30 (Coordenadas cilíndricas)**.** *Considérese en $\mathbb{R}^3$ el sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) e introdúzcase el sistema nuevo dado por la tripleta (r, ϕ, z) donde r, ϕ son las coordenadas del ejemplo anterior y z es la tercera coordenada cartesiana; esto es, las ecuaciones*

$$x = r\cos\phi, \quad y = r \operatorname{sen}\phi, \quad z = z$$

definen al sistema de coordenadas cilíndricas. ▷

Ahora analizaremos el problema de la asignación de coordenadas desde un punto de vista más general.

Definición 0.31. Sean $r \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y (u^1, u^2, u^3) un sistema de coordenadas definido en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Un **cambio de sistema de coordenadas** en Ω de clase C^r, o bien un **cambio de coordenadas de clase** C^r, es un difeomorfismo $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^3$ de clase C^r, de modo que las coordenadas (x^1, x^2, x^3) en $\varphi(\Omega)$ están dadas por

$$x^i = x^i(u^1, u^2, u^3), \quad i = 1, 2, 3. \tag{0.2}$$

Ejemplo 0.32. *Consideremos un cambio lineal de coordenadas en $\Omega = \mathbb{R}^3$. Con respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, este cambio tiene asociada una matriz $A = (a^i_j)$ de 3×3 con entradas reales. El cambio φ se escribe como*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}.$$

La existencia de una transformación (lineal) inversa está sujeta a la invertibilidad de la matriz a^i_j. *Para ello, es necesario y suficiente que su determinante sea no nulo:*

$$\det A = \det(a^i_j) \neq 0.$$

En tal caso, existe una matriz $B = (b^j_k)$ *tal que* $AB = BA = I$*; es decir,* $B = A^{-1}$. *La condición* $AB = I$ *se puede escribir como*

$$\sum_{j=1}^{3} a^i_j b^j_k = \delta^i_k,$$

donde δ^i_k *es la* **delta de Kronecker** *definida por*

$$\delta^i_k = \begin{cases} 1, & \text{para } i = k, \\ 0, & \text{para } i \neq k. \end{cases}$$

Esta discusión caracteriza a los cambios lineales de coordenadas en $\mathbb{R}^3$.
▷

Ejemplo 0.33. *Considérese la transformación lineal* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$(u^1, u^2, u^3) = L(x, y, z) = (3x + 2y + 2z,\ x + 3y + z,\ 5x + 3y + 4z).$$

La matriz asociada a tal transformación L *en base canónica es*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Un cálculo simple muestra que $\det A = 5$*, lo que nos asegura la invertibilidad de* L*. Otro cálculo directo nos muestra que*

$$B = A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$

de modo que las igualdades

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{5}\left(9u^1 - 2u^2 - 4u^3\right), \\ y &= \frac{1}{5}\left(u^1 + 2u^2 - u^3\right), \\ z &= \frac{1}{5}\left(-12u^1 + u^2 + 7u^3\right). \end{aligned}$$

definen a la transformación L^{-1}. ▷

El teorema de la función inversa 0.26 nos permite generalizar el criterio de invertibilidad de una transformación lineal $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\det A \neq 0$ al caso de una transformación arbitraria definida en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Definición 0.34. Sea $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ el cambio de coordenadas dado por las ecuaciones (0.2). El punto $p \in \Omega$ es un **punto regular** de φ si y sólo si la matriz derivada

$$D\varphi_p = \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}(p) \right)_{i,j=1,2,3}$$

es invertible. En este caso, el punto $q = \varphi(p)$ se llamará **valor regular** de φ.

La matriz $D\varphi_p$ es la **matriz jacobiana** de φ en el punto p y es la parte lineal de φ. El determinante de esta matriz, que se denota por

$$J(p) = \frac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(u^1, u^2, u^3)}(p),$$

se llama el **jacobiano** de $D\varphi_p$.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del teorema de la función inversa 0.26 y nos asegura la invertibilidad local de un cambio de coordenadas alrededor de un punto regular.

Teorema 0.35. *Si p es un punto regular para el cambio de coordenadas $(x^1, x^2, x^3) = \varphi(u^1, u^2, u^3)$, entonces en una vecindad de p en Ω se puede definir una transformación inversa $\varphi^{-1}(x^1, x^2, x^3) = (u^1, u^2, u^3)$. Más aún, si $B = (b^j_k)$ es la matriz jacobiana de la transformación φ^{-1}, entonces se cumple la fórmula matricial $AB = I$.*

En otras palabras, la invertibilidad de la parte lineal de φ implica la invertibilidad local de φ. Esto es, define un cambio de coordenadas en forma local.

A continuación damos ejemplos de cambios de coordenadas en el plano $\mathbb{R}^2$ y en el espacio $\mathbb{R}^3$. Se hará uso del teorema 0.35 en cada uno de ellos.

Ejemplo 0.36 (Coordenadas polares)**.** *Recordemos que la relación entre las coordenadas cartesianas* (x, y) *y las coordenadas polares* (r, ϕ) *es*

$$\varphi : \begin{cases} x = r\cos\phi, \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\phi. \end{cases}$$

Dado un punto $p_0 = (r_0, \phi_0)$*, verificaremos la condición del teorema 0.35 para la invertibilidad local. Para esto calcularemos la matriz jacobiana de* φ *en* p*:*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix}(p) = \begin{pmatrix} \cos\phi_0 & -r_0\,\mathrm{sen}\,\phi_0 \\ \mathrm{sen}\,\phi_0 & r_0\cos\phi_0 \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta matriz es

$$\det A = \begin{vmatrix} \cos\phi_0 & -r_0\,\mathrm{sen}\,\phi_0 \\ \mathrm{sen}\,\phi_0 & r_0\cos\phi_0 \end{vmatrix} = r_0(\cos^2\phi_0 + \mathrm{sen}^2\,\phi_0) = r_0,$$

con lo que $\det A \neq 0$ *en* $\mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi)$*, de modo que* φ *es invertible en forma local. Un cambio inverso de coordenadas locales* φ^{-1} *está dado por*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan(y/x).$$

La figura 0.6 ilustra al sistema de coordenadas polares. ▷

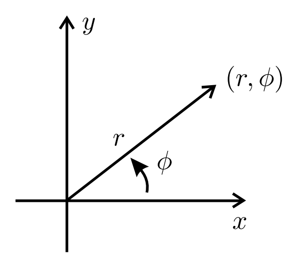


Figura 0.6: Coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 0.37 (Coordenadas cilíndricas)**.** *La relación entre las coordenadas cartesianas* (x, y, z) *y las coordenadas cilíndricas es*

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\phi, \quad z = z.$$

La matriz jacobiana del cambio de coordenadas es

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -r\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con determinante

$$\det A = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r,$$

que es diferente de cero si $r > 0$. *Este conjunto corresponde a todo el espacio, con excepción del eje* z. *Una función inversa local está dada por*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan(y/x), \quad z = z,$$

definida cuando $x \neq 0$. *Como* $\phi \in (0, 2\pi)$, *entonces se tiene un cambio de coordenadas* (x, y, z) *por* (r, ϕ, z), *y viceversa, sólo cuando el punto es tomado en alguno de los octantes (sin contener los planos coordenados de* $\mathbb{R}^3$*). La figura 0.7 ilustra este ejemplo.* ▷

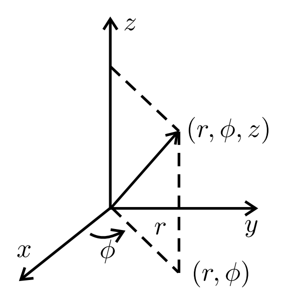


Figura 0.7: Coordenadas cilíndricas.

Ejemplo 0.38 (Coordenadas esféricas)**.** *Como último ejemplo, considere las coordenadas cartesianas* (x, y, z) *en* $\mathbb{R}^3$ *y las nuevas coordenadas* (r, ϕ, θ) *en* $\mathbb{R}^3$ *dadas por las ecuaciones*

$$x = r\cos\phi\operatorname{sen}\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \quad z = r\cos\theta,$$

donde $r > 0$, $0 < \theta < \pi$ *y* $0 < \varphi < 2\pi$. *La matriz jacobiana para cada punto* $(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3$ *es*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi \operatorname{sen}\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & r\operatorname{sen}\phi\cos\theta & r\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $\det A = r^2 \operatorname{sen}\theta$. *De esta forma,* $\det A = 0$ *si y sólo si* $r = 0$ *o bien* $\theta = 0, \pi$.

De nuevo, esto define un cambio de coordenadas en una región del espacio que omite al eje z. *El sistema se conoce como las* **coordenadas co-geográficas esféricas**. *La figura 0.8 ilustra este ejemplo.* ▷

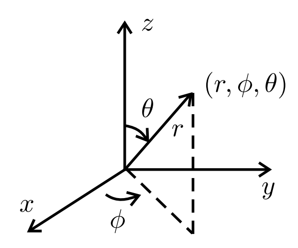


Figura 0.8: Coordenadas co-geográficas esféricas.

0.8 Puntos y vectores

El lector perspicaz habrá notado que en este capítulo hemos utilizado dos notaciones distintas al referirnos a los elementos de $\mathbb{R}^3$. En algunos casos usamos la notación p, q para los que llamamos *puntos* del espacio, mientras que en otros usamos las letras ξ, η, ζ, v, w al referirnos a los *vectores*. Esta diferencia es sutil en $\mathbb{R}^3$, pero será fundamental al estudiar las curvas y las superficies.

Por el momento, podemos distinguir entre un punto de $\mathbb{R}^3$ y un vector *anclado* en el punto. Pensando de esta forma, el conjunto de vectores anclados en p será el **espacio tangente a** $\mathbb{R}^3$ en el punto mencionado. Denotaremos este conjunto por $T_p\mathbb{R}^3$. (Véase la figura 0.9.)

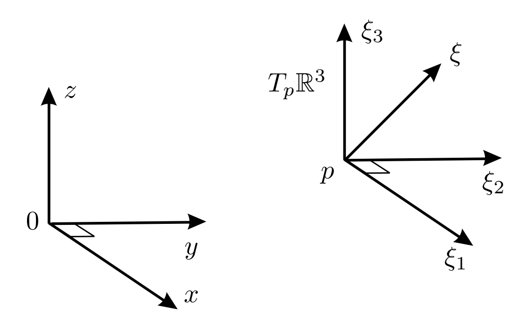


Figura 0.9: Espacio tangente a $\mathbb{R}^3$ en p.

Más adelante será conveniente pensar a un vector $\xi \in T_p\mathbb{R}^3$ como el **vector tangente** a una curva; es decir,

$$T_p\mathbb{R}^3 = \{\, \xi = \beta'(0) \,|\, \beta : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3, \beta(0) = p \,\}.$$

El espacio tangente $T_p\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ en un punto $p \in \mathbb{R}^2$ se define de manera análoga.

0.9 Ejercicios

1. Demuestre la proposición 0.2.
2. Demuestre la proposición 0.4.
3. Demuestre la proposición 0.6.
4. Demuestre que el área de un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$ generado por los vectores (u_1, u_2) y (v_1, v_2) se puede calcular como el valor absoluto del determinante
$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$
5. Demuestre la proposición 0.11.
6. Dados los vectores $\xi = (1, 2, -1)$, $\eta = (-1, 0, 1)$ y $\zeta = (0, -1, 3)$, calcule

(a) $\langle \xi, \eta \rangle - 2\langle \eta, \zeta \rangle$.

(b) La proyección de ξ en η.

(c) La proyección de η en ζ.

(d) $(\xi \times (\eta \times \zeta)) + (\zeta \times (\eta \times \xi))$.

(e) $(\xi, \eta, \zeta) + (\zeta, \xi, \eta)$.

7. Sean ξ, η, ζ vectores arbitrarios. Demuestre que

$$\xi \times (\eta \times \zeta) = \langle \xi, \zeta \rangle \eta - \langle \xi, \eta \rangle \zeta.$$

8. Demuestre la proposición 0.13.

9. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Demuestre que

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < g(x) \,\}$$

es un conjunto abierto y que

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq g(x) \,\} \quad \text{y} \quad \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = g(x) \,\}$$

son conjuntos cerrados.

10. ¿Es cierto que la intersección de conjuntos conexos es conexa? En caso afirmativo, demuéstrelo. En caso negativo, establezca condiciones adicionales para que se cumpla la afirmación. Conteste las cuestiones similares para el caso de la unión de conjuntos conexos.

11. Defina la relación "A es localmente difeomorfo a B" y demuestre que es una relación de equivalencia.

12. Demuestre que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface las hipótesis del teorema de la función inversa 0.26 tiene de hecho una inversa global. En contraste, muestre una transformación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfaga las hipótesis del teorema en todo $\mathbb{R}^2$ pero que sólo sea invertible localmente.

13. ¿Cuáles de las siguientes transformaciones dan lugar a cambios de coordenadas? Indique los tipos de regiones donde se cumple la invertibilidad y calcule una inversa local.

(a) $f(x,y) = \big(y + \operatorname{sen} x,\ x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} y\big)$.

(b) $f(x,y) = (x^2 - y^2, xy)$.

(c) $f(x,y,z) = (x + y + z,\ x^2 - y^2,\ x^2 + z^2 - y)$.

(d) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2, \arctan(y/x),\ z)$.

14. Dado un sistema de coordenadas (u^1, u^2, u^3) en $\mathbb{R}^3$, las **curvas coordenadas** se obtienen al fijar dos coordenadas $u^i =$ constante y variar la tercera. Dibuje algunas curvas coordenadas correspondientes a las coordenadas (a) cilíndricas en $\mathbb{R}^3$ y (b) esféricas en $\mathbb{R}^3$.

15. Considere el conjunto de todas las curvas $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ derivables tales que $\alpha(0) = (0,0,0)$ y defina la siguiente relación: $\alpha_1 \sim \alpha_2$ si y sólo si $\alpha'(0) = \alpha_2'(0)$. Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia y describa las clases de equivalencia bajo esta relación.

Capítulo 1

Curvas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

En este capítulo estudiamos las propiedades de las curvas planas y espaciales, que son los objetos básicos de estudio de la geometría diferencial.

1.1 Curvas derivables

Recordemos que una curva en $\mathbb{R}^3$ es una aplicación $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$. Si las coordenadas de $\mathbb{R}^3$ son x^1, x^2, x^3, entonces $\gamma(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$, donde $t \in (a, b)$.

A la imagen de (a, b) bajo γ le llamaremos la **curva imagen** o **traza** de la función γ.

Definición 1.1. Se dice que la curva $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ es **derivable** en el punto $t_0 \in (a, b)$ si y sólo si existe el límite vectorial

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0};$$

o bien, en coordenadas,

$$\lim_{t \to t_0} \left(\frac{x^1(t) - x^1(t_0)}{t - t_0}, \frac{x^2(t) - x^2(t_0)}{t - t_0}, \frac{x^3(t) - x^3(t_0)}{t - t_0} \right).$$

En tal caso, el límite se denota como

$$\dot{\gamma}(t_0) \quad \text{o} \quad \left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t = t_0},$$

y se llamará la **derivada** de γ en el punto t_0.

Podemos pensar al vector $\dot{\gamma}(t_0)$ como el **vector velocidad** de γ en el punto $\gamma(t_0)$, si el parámetro t se interpreta como el tiempo asociado a una curva física.

Como el límite que define a $\dot{\gamma}(t_0)$ depende de la existencia de cada uno de los límites

$$\lim_{t\to t_0} \frac{x^i(t) - x^i(t_0)}{t - t_0}, \quad i = 1, 2, 3,$$

entonces es claro que γ es derivable en t_0 si y sólo si cada x^i es derivable en t_0. Esto es, si para cada $i = 1, 2, 3$ existe el límite anterior, denotado por $\dot{x}^i(t_0)$. Si γ es derivable en cada punto t del intervalo (a, b), se dirá que γ es una **curva derivable**.

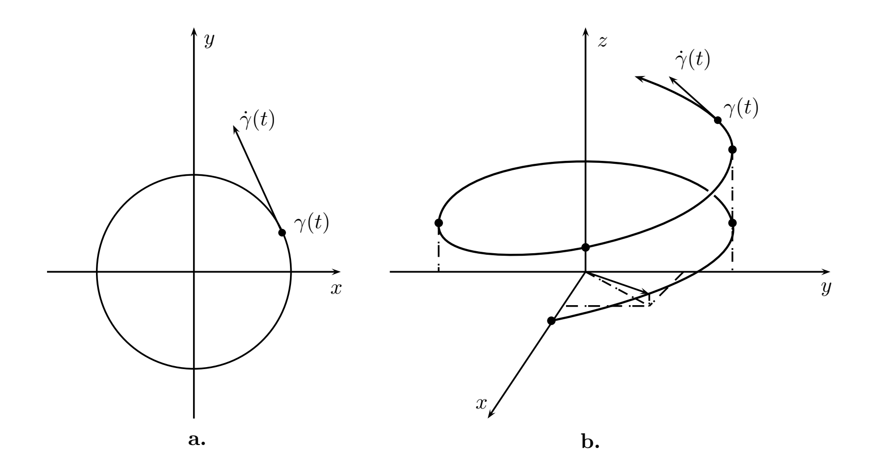


Figura 1.1: Curvas imagen de funciones vectoriales.

Ejemplo 1.2. *Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva dada por*

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\operatorname{sen} t), \quad R > 0.$$

La imagen de γ es una circunferencia $\mathbb{S}^1_R$ de radio R con centro en el origen del plano $\mathbb{R}^2$. (Véase la figura 1.1a.) Su derivada está dada por $\dot{\gamma}(t) = (-R\operatorname{sen} t, R\cos t)$. ▷

Ejemplo 1.3. *Considere la función vectorial*

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La traza de γ es una hélice de paso 2π, contenida en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ del espacio $\mathbb{R}^3$. (Véase la figura 1.1b.) Su derivada está dada por $\dot{\gamma}(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$. ▷

En el siguiente resultado resumimos algunas propiedades de la derivada, traducidas al contexto de las curvas. Omitiremos la prueba por ser un cálculo directo.

Lema 1.4. *Sean $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ curvas derivables. Se cumplen las siguientes propiedades (omitimos la evaluación en t):*

a. *Linealidad: Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\frac{d}{dt}(\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2) = \lambda\frac{d\gamma_1}{dt} + \mu\frac{d\gamma_2}{dt}.$$

b. *Fórmula de Leibniz. Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función derivable, entonces*

$$\frac{d}{dt}(\lambda\gamma_1) = \frac{d\lambda}{dt}\gamma_1 + \lambda\frac{d\gamma_1}{dt}.$$

c. *Fórmula de Leibniz para el producto escalar:*

$$\frac{d}{dt}\langle\gamma_1, \gamma_2\rangle = \left\langle\frac{d\gamma_1}{dt}, \gamma_2\right\rangle + \left\langle\gamma_1, \frac{d\gamma_2}{dt}\right\rangle.$$

d. *Fórmula de Leibniz para el producto cruz :*

$$\frac{d}{dt}(\gamma_1 \times \gamma_2) = \left(\frac{d\gamma_1}{dt} \times \gamma_2\right) + \left(\gamma_1 \times \frac{d\gamma_2}{dt}\right).$$

e. *Fórmula de Leibniz para el triple producto escalar:*

$$\frac{d}{dt}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}, \gamma_2, \gamma_3\right) + \left(\gamma_1, \frac{d\gamma_2}{dt}, \gamma_3\right) + \left(\gamma_1, \gamma_2, \frac{d\gamma_3}{dt}\right).$$

Ejemplo 1.5. *Sean* γ_1 *y* γ_2 *las curvas dadas por*

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2\pi t) \quad \text{y} \quad \gamma_2(t) = (4t^2, 2t, -t),$$

definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. *Por el lema 1.4 se obtiene que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle &= \langle (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2\pi), (4t^2, 2t, -t) \rangle \\ &\quad + \langle (\cos t, \operatorname{sen} t, 2\pi t), (8t, 2, -1) \rangle \\ &= -4t^2 \operatorname{sen} t + 2t \cos t - 2\pi t + 8t \cos t + 2 \operatorname{sen} t - 2\pi t \\ &= (2 - 4t^2) \operatorname{sen} t + 10t \cos t - 4\pi t. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma_1 \times \gamma_2) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & 2\pi \\ 4t^2 & 2t & -t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos t & \operatorname{sen} t & 2\pi t \\ 8t & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-t \cos t - 4\pi t, -t \operatorname{sen} t + 8\pi t^2, -2t \operatorname{sen} t - 4t^2 \cos t) \\ &\quad + (-\operatorname{sen} t - 4\pi t, \cos t + 16\pi t^2, 2 \cos t - 8t \operatorname{sen} t), \end{aligned}$$

de modo que al simplificar tenemos que

$$(-t \cos t - \operatorname{sen} t - 8\pi t, \cos t - t \operatorname{sen} t + 24\pi t^2, -4t^2 \cos t - 10t \operatorname{sen} t + 2 \cos t)$$

es la expresión para la derivada en cuestión. ▷

1.2 Curvas regulares

Definición 1.6. Una curva $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ es **regular** si y sólo si γ es de clase C^1 y $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$.

Las dos curvas mencionadas en los ejemplos 1.2 y 1.3 son regulares, como lo muestran las reglas de correspondencia de sus derivadas respectivas.

Ejemplo 1.7. *La curva* **cúspide** *está definida por*

$$\gamma(t) = (t^3, t^2).$$

La derivada de γ en cualquier $t \in \mathbb{R}$ es

$$\dot{\gamma}(t) = (3t^2,\, 2t),$$

lo que nos dice que $\dot{\gamma}(t) = 0$ cuando $t = 0$. Esto es, el vector velocidad $\dot{\gamma}$ se anula en $t = 0$ y por tanto esta curva no es regular. (Véase la figura 1.2.) $\triangleright$

Damos a continuación ejemplos de curvas planas que tienden asintóticamente a ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.8. *Sea $\gamma : (\pi, \infty) \to \mathbb{R}^2$ la curva plana definida por*

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{t}, \frac{\operatorname{sen} t}{t} \right).$$

Podemos pensar que la curva $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ está deformada por la función escalar $\lambda(t) = 1/t$, de modo que la imagen de γ es una espiral plana que parte de $\gamma(\pi) = (-1/\pi, 0)$ y que tiende al punto $(0,0)$ cuando $t \to \infty$, girando en sentido contrario a las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 1.3a.

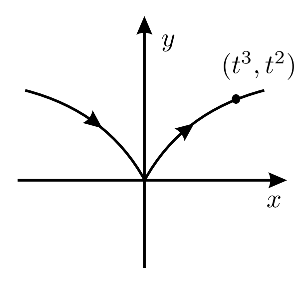


Figura 1.2: Curva imagen de la cúspide.

La derivada de γ está dada por

$$\dot{\gamma}(t) = -\frac{1}{t^2}(t \operatorname{sen} t + \cos t, \operatorname{sen} t - t \cos t).$$

Podemos observar que la derivada es continua y no se anula en ningún punto de su dominio $t \in (\pi, \infty)$. Esto hace de γ una curva regular. $\triangleright$

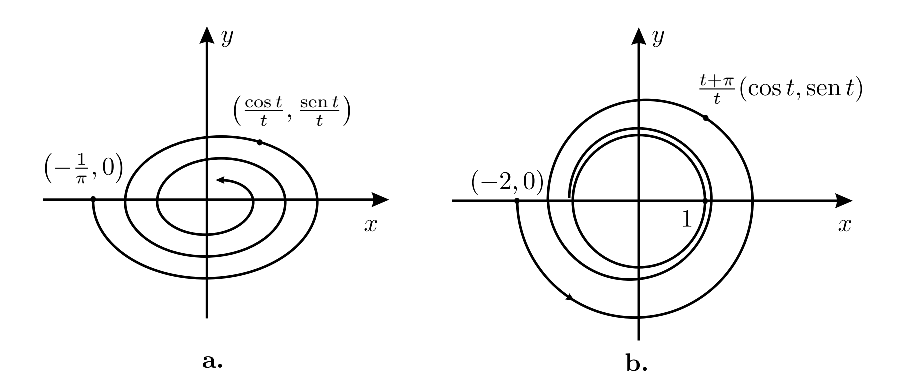


Figura 1.3: Espirales.

Ejemplo 1.9. *Sea $\gamma : (\pi, \infty) \to \mathbb{R}^2$ la curva dada por*

$$\gamma(t) = \left(\frac{t+\pi}{t} \cos t, \frac{t+\pi}{t} \operatorname{sen} t \right)$$

De manera similar al ejemplo anterior podemos ver que la imagen de γ en $\mathbb{R}^2$ es una curva espiral que inicia en el punto $\gamma(\pi) = (-2, 0)$ y que tiende en forma asintótica a la circunferencia de radio 1 con centro en el origen. Esto se debe a que γ se puede escribir como

$$\gamma(t) = \mu(t)\ (\cos t, \operatorname{sen} t),$$

donde $\mu(t) = (t + \pi)/t$ es una función que tiende a 1 cuando el parámetro t tiende a ∞. La derivada

$$\dot\gamma(t) = -\frac{\pi}{t^2}(t \operatorname{sen} t + \cos t, \operatorname{sen} t - t \cos t)$$

es continua y distinta de cero para todo $t \in (\pi, \infty)$, lo que hace de γ una curva regular. La figura 1.3b ilustra esta curva plana. ▷

Observación. En ciertos casos conviene extender el concepto de curva regular al caso en que γ esté definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Para ello, supondremos además que existen las derivadas laterales

$$\dot\gamma_+(a) = \lim_{t \to a^+} \frac{\gamma(t) - \gamma(a)}{t - a}, \quad \dot\gamma_-(b) = \lim_{t \to b^-} \frac{\gamma(b) - \gamma(t)}{b - t}.$$

Así, dada una curva regular $\gamma : J \to \Gamma$, para cada $t \in J$ definimos el **vector tangente** a la curva en $\gamma(t)$ como el vector $\dot{\gamma}(t)$ para los puntos interiores del dominio; y definimos el vector tangente a γ en los extremos a y b mediante los límites laterales ya mencionados $\dot{\gamma}_+(a)$ y $\dot{\gamma}_-(b)$. (Véase la figura 1.4.)

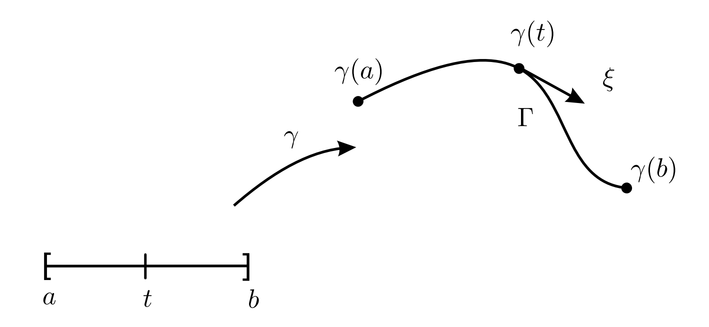


Figura 1.4: Vector tangente a una curva.

1.3 Curvas regulares parametrizadas

En las secciones anteriores hemos analizado a las curvas como *aplicaciones* del tipo $\gamma : J \to \mathbb{R}^3$, donde J es un intervalo (abierto o cerrado). Sin embargo, a veces es conveniente estudiar a las curvas como *subconjuntos* de $\mathbb{R}^3$. Para este caso, podemos plantear el concepto de curva regular parametrizada. Desde un punto de vista intuitivo, una curva regular parametrizada será un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que "localmente" es una curva regular.

Definición 1.10. Una **curva regular parametrizada** Γ en $\mathbb{R}^3$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ tal que para todo punto $p \in \Gamma$ existe un intervalo $J = (-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, y una curva regular $\gamma : J \to \Gamma$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma : J \to \gamma(J)$ es un difeomorfismo de J con una vecindad (relativa) de p en Γ. (Véase figura 1.5.) La pareja (γ, J) es una **parametrización (local)** de Γ alrededor del punto p.

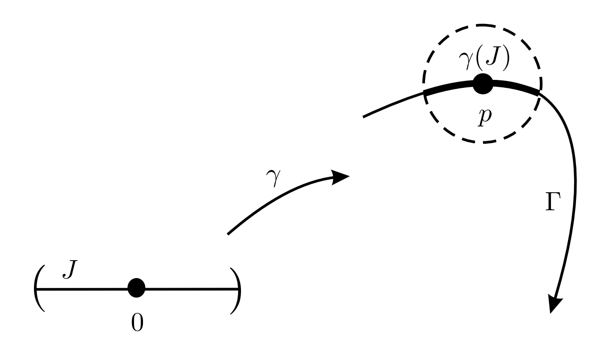


Figura 1.5: Curva regular parametrizada.

En las coordenadas (x^1, x^2, x^3) del espacio, la curva Γ está dada localmente por $\gamma(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$, $t \in J$, donde las coordenadas son funciones reales de clase C^1 definidas en el intervalo $J = (-\epsilon, \epsilon)$ que contiene a $t = 0$.

Ejemplo 1.11. *Sea Γ la elipse en el plano con semieje mayor $a > 0$ y semieje menor b, definida por la ecuación*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Para parametrizar a Γ deformamos la circunferencia unitaria $x^2+y^2 = 1$ parametrizada por $t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t)$, usando un escalar a en la primera coordenada y un escalar b en la segunda coordenada. Esto es, $\gamma(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t)$, donde $t \in \mathbb{R}$, es una parametrización local de la elipse Γ. El vector tangente a γ en el punto $\gamma(t) \in \Gamma$ está dado por

$$\dot\gamma(t) = (-a \operatorname{sen} t, b \cos t).$$

Como $\dot\gamma(t) \neq 0$, entonces Γ es una curva regular. ▷

Ejemplo 1.12. *Considérese la curva plana $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$\gamma(t) = (t^3 - t,\, t^2 - 1).$$

La figura 1.6 muestra la imagen de γ. Observe que γ es regular, pero no es inyectiva, pues su imagen tiene una autointersección en $\gamma(1) = \gamma(-1) = (0, 0)$.

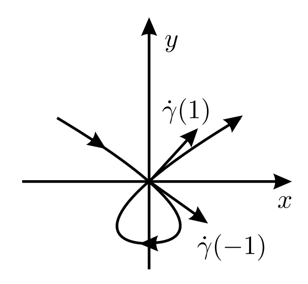


Figura 1.6: Curva plana que se autointerseca.

En este punto se tienen dos vectores tangentes,

$$\dot{\gamma}(1) = (2, 2), \quad \text{y} \quad \dot{\gamma}(-1) = (2, -2).$$

La imagen de γ no es una curva regular parametrizada, pues ninguna vecindad (relativa) de $(0, 0)$ puede ser difeomorfa a un intervalo. (¿Por qué?) $\triangleright$

Observación. Supongamos que Γ es una curva regular parametrizada en el sentido de la definición anterior. No es difícil mostrar que si Γ es conexa, entonces es posible introducir una parametrización **global**, es decir, es posible considerar a Γ como la imagen de una sola parametrización $\gamma : J \to \Gamma$. (Ver apéndice 2 de [6].) En este sentido y para facilitar nuestra exposición, en lo sucesivo sólo analizaremos curvas regulares parametrizadas conexas.

1.4 Longitud de arco y ángulo entre curvas

Ahora definiremos los conceptos de longitud de arco de una curva y de ángulo entre curvas, conceptos heredados de manera directa de los resultados básicos del cálculo.

Definición 1.13. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ una curva regular conexa, parametrizada por $\gamma : [a, b] \to \Gamma$. La **longitud** de $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ se define por

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle}\, dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt,$$

donde $\dot{\gamma}(t)$ es el vector tangente a la curva Γ en el punto $\gamma(t)$.

Ejemplo 1.14. *Sea $\mathbb{S}^1_R$ la* **circunferencia** *de radio R con centro en $(0,0)$ en el plano $\mathbb{R}^2$, parametrizada por $\gamma(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\,t)$, con $t \in [0,2\pi]$. La longitud de $\mathbb{S}^1_R$ es*

$$\begin{aligned} \ell(\mathbb{S}^1_R) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\,\mathrm{sen}^2\,t + R^2\cos^2 t}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(\mathrm{sen}^2\,t + \cos^2 t)}dt = \int_0^{2\pi} R\ dt = 2\pi R, \end{aligned}$$

como era de esperar. ▷

Ejemplo 1.15. *Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ la hélice contenida en el cilindro de radio 4 y paso $h = 4\pi$, parametrizada por $\gamma(t) = (4\cos t, 4\,\mathrm{sen}\,t, 2t)$. El vector tangente es $\dot{\gamma}(t) = (-4\,\mathrm{sen}\,t, 4\cos t, 2)$ y se tiene que*

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 16\,\mathrm{sen}^2\,t + 16\cos^2 t + 4 = 20.$$

Por lo tanto,

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\|dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{20}dt = 2\sqrt{20}\pi$$

es la longitud de la hélice desde el punto $(1,0,0)$ hasta el primer paso $(1,0,2\pi)$. ▷

Definición 1.16. Dada una curva regular Γ parametrizada por $\gamma : [a,b] \to \Gamma$, supongamos que su parámetro t se puede expresar como una función diferenciable $t = t(u)$, donde $t : [c,d] \to [a,b]$ y $\frac{dt}{du} \neq 0$ en todo el intervalo $[c,d]$. La composición $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ t : [c,d] \to \Gamma$ es una **reparametrización** de la curva Γ. Se dice también que $t = t(u)$ es un cambio de coordenadas para Γ.

El siguiente resultado nos asegura la independencia de la longitud de una curva respecto a cualquier parametrización. Esto es, la definición de longitud no depende de la parametrización escogida de la curva.

Lema 1.17. *Sea Γ una curva regular, parametrizada por*

$$\gamma : [a,b] \to \Gamma,$$

donde $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$. *Si* $\widetilde{\gamma} : [c, d] \to \Gamma$ *es una reparametrización local de la forma* $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ t$ *con* $t = t(u)$, *entonces las longitudes calculadas con respecto de las parametrizaciones respectivas son las mismas, es decir*

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_c^d \|\widetilde{\gamma}'(u)\| du,$$

donde el punto denota la derivada respecto de t *y el apóstrofe la derivada respecto de* u.

Demostración. Si $\gamma(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ y $t = t(u)$, entonces

$$\widetilde{\gamma}(u) = \gamma(t(u)) = (x^1(t(u)), x^2(t(u)), x^3(t(u)) = (y^1(u), y^2(u), y^3(u)).$$

de modo que el vector velocidad está dado por

$$\widetilde{\gamma}'(u) = \left(\frac{dy^1}{du}, \frac{dy^2}{du}, \frac{dy^3}{du} \right), \quad c \leq u \leq d.$$

Ahora usamos la regla de la cadena para escribir

$$\frac{dy^i}{du} = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{du}, \quad i = 1, 2, 3,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\gamma}'(u)\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dy^i}{du} \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{du} \right)^2} \\ &= \left| \frac{dt}{du} \right| \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2} = \left| \frac{dt}{du} \right| \|\dot{\gamma}(t)\|. \end{aligned}$$

Como $dt/du \neq 0$ para todo u, podemos suponer por el momento que $dt/du > 0$, de modo que

$$\|\widetilde{\gamma}'(u)\| = \frac{dt}{du} \|\dot{\gamma}(t)\|.$$

Por el teorema de cambio de variable se obtiene que

$$\widetilde{\ell} = \int_c^d \|\widetilde{\gamma}'(u)\| du = \int_c^d \|\dot{\gamma}(t(u))\| \frac{dt}{du} \, du = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \; dt = \ell.$$

Si $dt/du < 0$, tenemos

$$\|\widetilde{\gamma}'(u)\| = -\frac{dt}{du}\|\dot{\gamma}(t)\|,$$

y usando de nuevo el teorema de cambio de variable, observando que ahora $t(c) = b$ y $t(d) = a$,

$$\widetilde{\ell} = \int_c^d \|\widetilde{\gamma}'(u)\|du = -\int_c^d \|\dot{\gamma}(t(u))\|\frac{dt}{du}\,du = -\int_b^a \|\dot{\gamma}(t)\|\;dt = \ell,$$

lo que concluye la demostración. □

Sea Γ una curva regular parametrizada por $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Entonces, para cada $t \in [a, b]$, la longitud $\ell(t)$ desde el punto inicial $\gamma(a)$ hasta el punto variable $\gamma(t)$ es

$$\ell(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(\sigma)\|d\sigma,$$

lo que implica que

$$\frac{d\ell}{dt} = \|\dot{\gamma}(t)\|.$$

Si un parámetro s mide por sí mismo la longitud de $\gamma(a)$ hasta $\gamma(s)$, tenemos que $\ell(s) = s$ y en consecuencia,

$$1 \equiv \frac{d\ell}{ds} = \|\dot{\gamma}(s)\|.$$

De manera recíproca, si una parametrización de Γ satisface $\|\dot{\gamma}(s)\| \equiv 1$, entonces la longitud de la curva desde $\gamma(a)$ hasta $\gamma(s)$ es

$$\ell(s) = \int_a^s d\sigma = s - a,$$

lo que nos dice que, salvo una constante, s es el parámetro que mide por sí mismo la longitud de arco de γ.

Definición 1.18. Si el parámetro s de una curva γ cumple $\ell(s) = s$, entonces s se llama el **parámetro de longitud de arco** para la curva γ. También decimos que γ está **parametrizada por longitud de arco**.

Observación. Si una curva de longitud finita está parametrizada por longitud de arco, podemos suponer sin pérdida de generalidad que γ está definida en un intervalo de la forma $[0, L]$, siendo L la longitud total de la curva.

De la discusión anterior tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.19. *Sea γ una curva parametrizada por longitud de arco s. Entonces la velocidad $v(s) = \dot{\gamma}(s)$ tiene rapidez constante: $\|v(s)\| = 1$ para todo $s \in [0, L]$. De manera recíproca, si $\|v(s)\|$ es constante e igual a 1, entonces $\ell(s) = s$.*

En lo que resta de la sección, cada vez que una curva esté parametrizada por la longitud de arco $s = \ell(s)$, la derivada con respecto de este parámetro se denotará mediante un apóstrofe $(')$.

Ejemplo 1.20. *Sea Γ una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto η con vector director ξ. Entonces Γ se puede parametrizar como $\gamma(t) = t\xi + \eta$, de modo que $\gamma' = \xi$; si la derivada debe satisfacer $\|\gamma'\| = 1$, basta escoger al vector ξ tal que $\|\xi\| = 1$. Esto es, para que una recta tenga parametrización por longitud de arco, es suficiente que su vector director ξ sea unitario.* $\triangleright$

Ejemplo 1.21. *Sea $\mathbb{S}^1_R$ la circunferencia de radio R con centro en $(0, 0)$ en el plano $\mathbb{R}^2$. Para dar una parametrización por longitud de arco $s = \ell(s)$, tratamos de ajustar la frecuencia de la parametrización canónica mediante un factor ϕ por determinar; es decir, sea*

$$\gamma(s) = (R\cos(\phi s), R\operatorname{sen}(\phi s)).$$

Ya que $x' = -R\phi \operatorname{sen} \phi s$ y $y' = R\phi \cos \phi s$, se tiene que $\|\gamma'(s)\| = 1$ si y sólo si

$$1 = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{R^2\phi^2 \operatorname{sen}^2(\phi s) + R^2\phi^2 \cos^2(\phi s)} = R\phi,$$

lo que implica que el factor buscado es $\phi = 1/R$. De esta manera,

$$\gamma(s) = \left(R\cos\left(\frac{s}{R}\right), R\operatorname{sen}\left(\frac{s}{R}\right)\right)$$

es la parametrización de $\mathbb{S}^1_R$ por longitud de arco. $\triangleright$

En general, es difícil determinar de forma explícita la parametrización por longitud de arco de una curva Γ. Sin embargo, supongamos que la

curva admite una parametrización regular $\gamma : [a, b] \to \Gamma$. Como la longitud de $\gamma(a)$ hasta $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$ está dada por

$$\ell(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(\sigma)\| \, d\sigma,$$

tenemos que

$$\frac{d\ell}{dt} = \|\dot{\gamma}(t)\| > 0,$$

de modo que $\ell(t)$ es una función creciente y por tanto con una inversa $t = t(s)$ diferenciable, con derivada

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{d\ell/dt} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|}.$$

Podemos entonces considerar la reparametrización $\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$. Por la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{d\widetilde{\gamma}}{ds} = \frac{d\gamma}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\dot{\gamma}(t).$$

Puesto que la última expresión representa un vector unitario, tenemos que $\widetilde{\gamma}$ es la reparametrización por longitud de arco. El problema general consiste en obtener una expresión para $\ell(t)$ que permita determinar con cierta facilidad la forma de la función $t = t(s)$.

Ejemplo 1.22. *Consideremos la curva regular*

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t),$$

donde $t \in (-\infty, \infty)$.

Entonces la longitud de arco $\ell(t)$ *de tal curva, desde* 0 *hasta* t, *viene dada por*

$$\ell(t) = \int_o^t \|\dot{\gamma}(\sigma)\| d\sigma = \int_0^t \sqrt{3}e^{2\sigma} \, d\sigma = \sqrt{3}(e^t - 1) = s.$$

Al despejar t, *se tiene*

$$t = \ln h(s), \quad \text{donde} \quad h(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right).$$

Por lo tanto, la misma curva parametrizada por longitud de arco queda

$$\gamma(s) = h(s)\left(\cos \ln h(s), \operatorname{sen} \ln h(s), 1\right),$$

donde $s \in (-\sqrt{3}, \infty)$. ▷

Ahora definiremos el ángulo entre dos curvas. Consideremos dos curvas regulares Γ_1 y Γ_2 parametrizadas por $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ y $\gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, respectivamente. Supóngase además que las curvas Γ_1 y Γ_2 se intersecan en el punto correspondiente a $t_0 \in [a,b]$; esto es,

$$\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0).$$

Si las expresiones de γ_1 y γ_2 en coordenadas son

$$\gamma_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) \quad \text{y} \quad \gamma_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)),$$

de modo que sus vectores tangentes en el punto común $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ son $\dot{\gamma}_1(t_0)$ y $\dot{\gamma}_2(t_0)$, es natural definir el ángulo entre esas curvas en $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ como el ángulo formado por sus vectores tangentes. Esto es, si tal ángulo es θ, entonces θ satisface

$$\cos\theta = \frac{\langle \dot{\gamma}_1(t_0),\, \dot{\gamma}_2(t_0)\rangle}{\|\dot{\gamma}_1(t_0)\|\|\dot{\gamma}_2(t_0)\|}.$$

Ejemplo 1.23. *Sean* Γ_1 *y* Γ_2 *las curvas planas definidas por*

$$\gamma_1(t) = (t, t^2) \quad \text{y} \quad \gamma_2(t) = (t, t^3),$$

con $t \in [0,4]$. *Es claro que* $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = (1,1)$ *es un punto de intersección de* Γ_1 *y* Γ_2. *Entonces el ángulo formado en* $(1,1)$ *por las curvas* Γ_1 *y* Γ_2 *es*

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle (1,2), (1,3)\rangle}{\sqrt{5}\sqrt{10}}\right) = \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{50}}\right) = \arccos\left(\frac{7\sqrt{2}}{10}\right),$$

poco más de 8 *grados.* ▷

1.5 Longitud de arco en coordenadas arbitrarias

En la sección anterior calculamos la longitud de arco de varias curvas. Para esto utilizamos la expresión de cada curva en coordenadas cartesianas. Sin embargo, a veces es más conveniente utilizar un sistema de coordenadas más adecuado a la curva en cuestión. En esta sección veremos cómo cambia la expresión para la longitud de arco de una curva, al cambiar el sistema de coordenadas. [1]

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ una región con coordenadas u^1, u^2, u^3. Sea Γ una curva regular en Ω, parametrizada por $\gamma(t) = (u^1(t), u^2(t), u^3(t))$ y $x^i = x^i(u^1, u^2, u^3)$ un cambio de coordenadas. Entonces tenemos definida la composición $\widetilde{\gamma}$ por

$$\widetilde{\gamma}(t) = (x^1(u(t)),\, x^2(u(t)),\, x^3(u(t)))$$

El vector v tangente a la curva $(u^1(t), u^2(t), u^3(t))$ tiene una expresión v_u con respecto de las coordenadas u^i dada por

$$v_u^i = \frac{du^i}{dt}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ahora veremos cómo se transforma el vector v al expresarlo en las coordenadas x^1, x^2, x^3. Esto es, si v_x denota a v con respecto de las coordenadas x^i, queremos determinar la relación de la expresión anterior con

$$v_x^k = \frac{dx^k}{dt}(u(t)) \quad k = 1, 2, 3.$$

Por ejemplo, la primera coordenada de v_x se calcula, según la regla de la cadena, por

$$v_x^1 = \frac{dx^1}{dt}(u(t)) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^1}{\partial u^i}\frac{du^i}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^1}{\partial u^i}\, v_u^i.$$

De manera análoga, para $k = 2, 3$ se tiene

$$v_x^k = \frac{dx^k}{dt}(u(t)) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^k}{\partial u^i}\,\frac{du^i}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^k}{\partial u^i}\, v_u^i.$$

[1] Esta sección puede omitirse en una primera lectura.

En notación matricial, estas relaciones se escriben como

$$v_x = A v_u,$$

donde A es la matriz del cambio de coordenadas,

$$A = \left(\frac{\partial x^k}{\partial u^i} \right).$$

De esta manera, si calculamos la norma de v_x mediante la fórmula euclidiana, tenemos

$$\begin{aligned} \|v_x\|^2 &= \sum_{k=1}^{3} (v_x^k)^2 = \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^k}{\partial u^i} v_u^i \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{3} \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial x^k}{\partial u^i} \frac{\partial x^k}{\partial u^j} v_u^i v_u^j \right) = \sum_{i,j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x^k}{\partial u^i} \frac{\partial x^k}{\partial u^j} \right) v_u^i v_u^j \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\, v_u^i\, v_u^j, \end{aligned}$$

donde se ha introducido la expresión

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x^k}{\partial u^i} \frac{\partial x^k}{\partial u^j}.$$

Escribimos lo anterior en notación matricial como sigue:

$$\|v_x\|^2 = \langle v_x, v_x \rangle = \langle A v_u, A v_u \rangle = (A v_u)^T (A v_u) = v_u^T (A^T A) v_u.$$

Es decir, la matriz $G = (g_{ij})$ corresponde al producto $G = A^T A$. Podemos denotar la última expresión como el producto $\langle v_u, v_u \rangle_G$ definido por G.

Ejemplo 1.24. *Considérese el plano $\mathbb{R}^2$ provisto de coordenadas cartesianas (x, y) y el producto escalar*

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^1 \eta^1 + \xi^2 \eta^2,$$

donde $\xi = (\xi^1, \xi^1)$ *y* $\eta = (\eta^1, \eta^2)$. *Definimos el cambio de coordenadas* $x = r\cos\theta$ *y* $y = r \operatorname{sen}\theta$.

Sea v_u *el vector velocidad* $(\dot r(t), \dot\theta(t))$ *de la curva* $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$ *en coordenadas polares. Si* v_x *denota al mismo vector en coordenadas* (x, y), *entonces*

$$\begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix} = v_x = A v_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot r(t) \\ \dot\theta(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot r \\ \dot\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot r\cos\theta - \dot\theta\, r\operatorname{sen}\theta \\ \dot r\operatorname{sen}\theta + \dot\theta\, r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Más aún, $\|v_x\|^2 = v_u^T (A^T A) v_u$, *donde* $G = A^T A$ *está dada por*

$$G = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix};$$

es decir,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, la norma del vector v_x *se calcula mediante*

$$\|v_x\|^2 = (\dot r \ \ \dot\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot r \\ \dot\theta \end{pmatrix} = \dot r^2 + r^2\dot\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2;$$

o bien,

$$\|v_x\| = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}.$$

Así, en coordenadas polares (r, θ) *tenemos que la longitud del arco se calcula por*

$$\ell = \int_a^b \|v_x\| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Utilicemos estas fórmulas para calcular la longitud de arco de la curva Γ *dada por* $r(t) = \operatorname{sen}^3(t/3)$, $\theta(t) = t$ *desde* $t = 0$ *hasta* $t = \pi/2$. *Tenemos que*

$$\begin{aligned} \dot r(t) &= 3\operatorname{sen}^2(t/3)\cos(t/3)\frac{1}{3} = \operatorname{sen}^2(t/3)\cos(t/3), \\ \dot\theta(t) &= 1, \end{aligned}$$

de donde

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \operatorname{sen}^4(t/3)\,\cos^2(t/3) + \operatorname{sen}^6(t/3) = \operatorname{sen}^4(t/3).$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{3}\right)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[t - \frac{3}{2}\operatorname{sen}\frac{2t}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}(2\pi - 3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

es la longitud deseada. ▷

Observemos que para calcular $\|v_x\|$ en otras coordenadas, es necesario obtener primero $(g_{ij}) = A^T A$ para luego determinar $v_u^T(A^T A)v_u$.

Ejemplo 1.25. *Considérese* $\mathbb{R}^3$ *con las coordenadas cartesianas y el cambio a coordenadas cilíndricas dado por* $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$.

En este caso, la matriz jacobiana es

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde la matriz que define el nuevo producto escalar es

$$\begin{aligned} G = A^T A &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (g_{ij}) \end{aligned}$$

De esta manera, un vector $v_x = (\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z})$ *tiene una norma dada por la fórmula*

$$\|v_x\|^2 = (\dot{r}\ \ \dot{\theta}\ \ \dot{z}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Esto es, la expresión

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

indica la longitud de arco en las coordenadas cilíndricas (r, θ, z). ▷

Ejemplo 1.26. *El cambio de coordenadas cartesianas por esféricas en* $\mathbb{R}^3$ *dado por el sistema*

$$\begin{cases} x &= r\cos\phi\cos\theta \\ y &= r\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ z &= r\operatorname{sen}\phi \end{cases}$$

nos da en este caso (¡verifíquelo!)

$$(g_{ij}(r,\phi,\theta)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\operatorname{sen}^2\,\theta \end{pmatrix}.$$

Así, la expresión

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\operatorname{sen}^2\,\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}\, dt$$

indica la longitud de arco en coordenadas esféricas (r, ϕ, θ). ▷

De la relación que define la norma en otras coordenadas

$$\|v_x\|^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\, v_u^i v_u^j = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j$$

se tiene que la longitud de arco de una curva Γ se calcula mediante

$$\begin{aligned} \ell(s) &= \int_a^b \|v_x\| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}\, dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\dot{u}^i\ \dot{u}^j\, dt^2} \\ &= \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\dot{u}^i dt\, \dot{u}^j dt} = \int_\Gamma \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} du^i du^j}. \end{aligned}$$

Escribimos esto en notación diferencial como sigue:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\, du^i\, du^j.$$

A continuación resumimos las fórmulas de longitud de arco en el plano y en el espacio para varios sistemas de coordenadas:

Coordenadas cartesianas:	$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$
Coordenadas polares:	$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2;$
Coordenadas cilíndricas:	$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2;$
Coordenadas esféricas:	$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2).$

1.6 Curvatura de curvas planas

Iniciamos ahora una discusión sobre la **curvatura** de una curva plana. La idea básica está fundada en la curvatura de las líneas más simples que se conocen: la circunferencia y la recta.

De manera intuitiva, la curvatura de una curva plana es una medida de cuánto se aparta la curva de sus tangentes al variar el parámetro.

Para el caso de una recta, podríamos definir su curvatura en cada punto en forma tentativa como 0. Para el caso de las circunferencias, podemos pensar que una circunferencia de radio R está menos curvada que una de radio $r < R$ y que una recta puede ser pensada como el límite de una sucesión de circunferencias tangentes cuyo radio crece a infinito. (Véase la figura 1.7.) Así, podríamos definir la curvatura de una circunferencia de radio R como la cantidad $\frac{1}{R}$. Esto implicaría que la curvatura de la recta fuese cero, pues la última cantidad mencionada tiende a cero si $R \to \infty$.

Definición 1.27. La curvatura k de una recta en cualquier punto p es cero: $k(p) = 0$. Por otro lado, la curvatura k de una circunferencia de radio $R > 0$ en un punto arbitrario p es $k(p) = \frac{1}{R}$.

Para el caso general, consideremos una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ y tres puntos sobre ella $\gamma(t_1), \gamma(t_2), \gamma(t_3)$, donde los argumentos han sido escogidos de modo que $t_1 < t_2 < t_3$. Ya que la curva es regular, podemos suponer

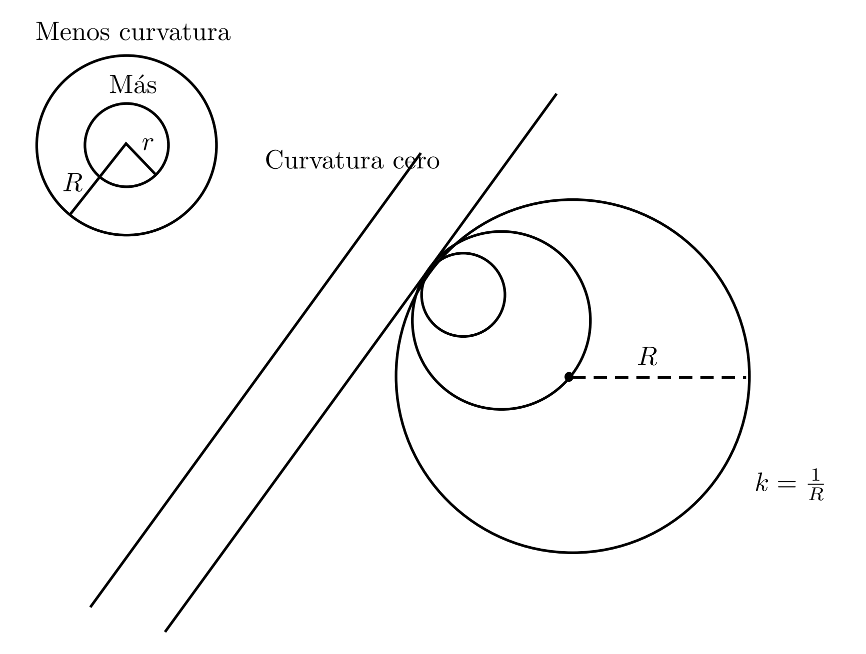


Figura 1.7: Curvaturas de la recta y de la circunferencia.

que $\gamma(t_1), \gamma(t_2)$ y $\gamma(t_3)$ son distintos. De la geometría básica sabemos que por ellos pasa una única circunferencia, con centro en el punto $C(t_1, t_2, t_3)$. (Véase la figura 1.8.)

Supongamos que γ es de clase al menos C^2 y consideremos la función $d : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(t) = \langle \gamma(t) - C(t_1, t_2, t_3), \gamma(t) - C(t_1, t_2, t_3) \rangle,$$

que es el cuadrado de la distancia del punto $\gamma(t)$ al centro de la circunferencia mencionada, y es una función en t de al menos clase C^2.

Es claro que $d(t_1) = d(t_2) = d(t_3)$, lo que nos indica, por el teorema del valor medio, que existen dos puntos $\xi_1 \in (t_1, t_2), \xi_2 \in (t_2, t_3)$ tales que

$$\dot{d}(\xi_1) = \dot{d}(\xi_2) = 0,$$

es decir

$$\dot{d}(\xi_i) = \langle \dot{\gamma}(\xi_i), \gamma(\xi_i) - C(t_1, t_2, t_3) \rangle = 0.$$

Ya que $\dot{d}(t)$ es de al menos clase C^1, por el mismo teorema del valor medio existe otro punto $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$ tal que $\ddot{d}(\eta) = 0$, lo que implica

$$\langle \ddot{\gamma}(\eta), \gamma(\eta) - C(t_1, t_2, t_3) \rangle + \langle \dot{\gamma}(\eta), \dot{\gamma}(\eta) \rangle = 0.$$

Si el centro $C(t_1, t_2, t_3)$ se aproxima a un punto $C = C(t)$ cuando $t_i \to t$, entonces, por continuidad, se tiene que $\xi_i \to t$, $\eta \to t$. Además,

$$\langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) - C \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle \ddot{\gamma}(t), \gamma(t) - C \rangle = -\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$$

La primera ecuación nos dice que el vector velocidad $\dot{\gamma}(t)$ es ortogonal al vector $\gamma(t) - C$ que indica el radio de la circunferencia tangente límite, lo que obligaría al centro de la circunferencia a estar en la dirección ortogonal a $\dot{\gamma}(t)$. (Véase la figura 1.8.)

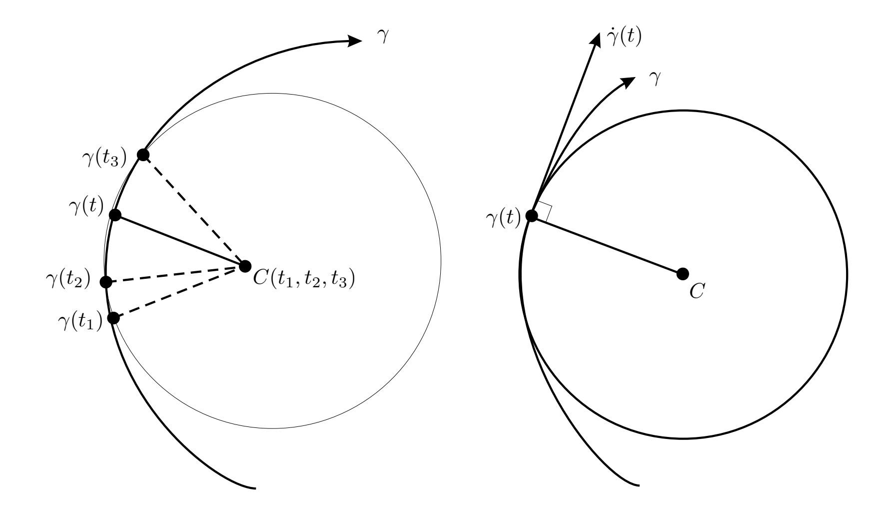


Figura 1.8: Circunferencia tangente a una curva.

Afirmamos que $\ddot{\gamma}(t)$ no está en la dirección de $\dot{\gamma}(t)$. De otra forma, existiría $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\ddot{\gamma}(t) = \lambda \dot{\gamma}(t)$, y entonces se tendría que, al usar la

regularidad de la curva,

$$\begin{aligned} 0 &\neq -\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = \langle \ddot{\gamma}(t), \gamma(t) - C \rangle \\ &= \langle \lambda \dot{\gamma}(t), \gamma(t) - C \rangle = \lambda \langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) - C \rangle \end{aligned}$$

pero esta última cantidad se anula. Esto es una contradicción y nos dice que $\ddot{\gamma}(t)$ y $\dot{\gamma}(t)$ no son colineales.

Ahora usamos el parámetro de longitud de arco $s = \ell(s)$ y denotamos por $(\,'\,)$ la operación de derivación respecto a s.

Como en este caso $\|\gamma'(s)\|^2 = 1$, entonces $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1$, lo que implica que

$$\langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle = 0,$$

lo que indica que los vectores $\gamma''(s)$ y $\gamma'(s)$ son ortogonales. De esta manera, existe un escalar λ tal que $\gamma''(s) = \lambda(\gamma(s) - C)$, lo que implica, al sustituir en la segunda ecuación que

$$\left\langle \gamma''(s),\ \frac{1}{\lambda}\gamma''(s) \right\rangle = -\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = -1;$$

o en forma equivalente,

$$\langle \gamma''(s),\ \gamma''(s) \rangle = -\lambda,$$

lo que nos dice que

$$|\lambda| = \|\gamma''(s)\|^2.$$

Por otro lado, de la relación $\gamma''(s) = \lambda(\gamma(s) - C)$ se tiene que

$$\|\gamma''(s)\| = |\lambda|\ \|\gamma(s) - C\|$$

y por lo tanto, el radio $R(s)$ de la circunferencia tangente sería

$$R(s) = \|\gamma(s) - C\| = \frac{\|\gamma''(s)\|}{|\lambda|} = \frac{\|\gamma''(s)\|}{\|\gamma''(s)\|^2} = \frac{1}{\|\gamma''(s)\|};$$

en consecuencia, la **curvatura** $k(s)$ en cada punto heredada por la curvatura de la circunferencia tangente estaría dada por

$$k(s) = \frac{1}{R(s)} = \|\gamma''(s)\|.$$

Omitiremos la prueba formal sobre la existencia de la circunferencia límite; el lector puede referirse a Spivak [10] para completar los detalles.

La circunferencia obtenida de esta manera es la **circunferencia osculatriz** de γ en el punto $\gamma(s)$ y es la circunferencia que mejor aproxima a γ en tal punto.

Ejemplo 1.28. *Sea* Γ *la circunferencia de radio* R *con centro en* $(0,0)$*. Entonces una parametrización por longitud de arco de* Γ *está dada por las ecuaciones*

$$x = R\cos\left(\frac{s}{R}\right), \quad y = R\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{R}\right).$$

Entonces, al calcular las derivadas tenemos

$$x' = -\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{R}\right), \quad x'' = -\frac{1}{R}\cos\left(\frac{s}{R}\right),$$

$$y' = \cos\left(\frac{s}{R}\right), \quad y'' = -\frac{1}{R}\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{R}\right),$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} k(s) &= \|\gamma''(s)\| = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{R^2}\cos^2\left(\frac{s}{R}\right) + \frac{1}{R^2}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{s}{R}\right)} = \frac{1}{R} \end{aligned}$$

es la curvatura de la circunferencia. ▷

Ejemplo 1.29. *Consideremos ahora una recta por el punto* $\eta \in \mathbb{R}^2$ *con un vector director* ξ*. La parametrización por longitud de arco es*

$$\gamma(s) = \eta + s\xi,$$

donde $\|\xi\| = 1$*.*

Si se calculan las dos primeras derivadas se tiene que

$$\gamma'(s) = \xi, \quad \gamma''(s) = 0,$$

lo que implica que la curvatura k *de la recta es* $k = \|\gamma''(s)\| = 0$*.* ▷

Estos dos ejemplos confirman nuestra definición inicial de curvatura.

Veremos ahora un procedimiento para dar un signo a la curvatura. Consideremos en cada punto $\gamma(s)$ de la curva γ a la pareja de vectores ortogonales $\{v(s), n(s)\}$, definidos por

$$v(s) = \gamma'(s), \quad n(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|} = \frac{\gamma''(s)}{k(s)}$$

o en forma equivalente,

$$\gamma'(s) = v(s), \, \gamma''(s) = k(s)n(s).$$

Una curva plana γ tiene asociada una pareja $\{v(s), n(s)\}$ en cada punto $\gamma(s)$. Esta pareja permite definir el concepto de **curvatura con signo** de una curva plana.

Definición 1.30. Dada una curva plana γ, damos a la curvatura de γ en s el signo del determinante

$$\begin{vmatrix} \gamma'(s) \\ \gamma''(s) \end{vmatrix}.$$

Podemos denotar por $k(s)$ a esta curvatura con signo. De la definición se observa que si se cambia la orientación de la curva, entonces cambia el signo de la curvatura.

De la relación $\gamma''(s) = k(s)n(s)$ tenemos que

$$|k(s)| = \|\gamma''(s)\|$$

Por otro lado, $\|\gamma''(s)\|$ es igual al área del rectángulo tendido sobre los vectores $\gamma''(s)$ y $\gamma'(s)$, en virtud de que $\|\gamma'(s)\| = 1$. Puesto que dicha área se calcula mediante el valor absoluto

$$\left| \det \begin{pmatrix} \gamma'(s) \\ \gamma''(s) \end{pmatrix} \right|,$$

entonces se tiene que $|k(s)|$ es igual al valor absoluto del determinante anterior. De hecho, como los signos de la curvatura y del determinante son los mismos por definición, lo anterior nos dice que

$$k(s) = \det \begin{pmatrix} \gamma'(s) \\ \gamma''(s) \end{pmatrix}.$$

De esta forma, si $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ son las coordenadas de la curva regular, entonces la función de curvatura es

$$k(s) = \begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) \\ x''(s) & y''(s) \end{vmatrix} = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s).$$

Consideremos ahora el caso general de una curva regular plana $\gamma = \gamma(t)$ que depende de un parámetro arbitrario $t \in [a, b]$. Al realizar el cambio de parámetro $t = t(s)$ se obtiene una curva $\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$. Si se denota con un punto la derivada con respecto del parámetro t, las fórmulas

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma}'(s) &= \dot{\gamma}(t)\frac{dt}{ds}, \\ \widetilde{\gamma}''(s) &= \ddot{\gamma}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \dot{\gamma}\frac{d^2t}{ds^2}, \end{aligned}$$

implican en un cálculo sencillo que la función de curvatura es

$$\begin{aligned} k(s) = \det\begin{pmatrix} \widetilde{\gamma}'(s) \\ \widetilde{\gamma}''(s) \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} \dot{\gamma}(t)\frac{dt}{ds} \\ \ddot{\gamma}(t)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \dot{\gamma}(t)\frac{d^2t}{ds^2} \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} \dot{\gamma}(t)\frac{dt}{ds} \\ \ddot{\gamma}(t)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \dot{\gamma}(t)\frac{dt}{ds} \\ \dot{\gamma}(t)\frac{d^2t}{ds^2} \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} \dot{\gamma}(t) \\ \ddot{\gamma}(t) \end{pmatrix}\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + \det\begin{pmatrix} \dot{\gamma}(t) \\ \dot{\gamma}(t) \end{pmatrix}\frac{d^2t}{ds^2} \\ &= \det\begin{pmatrix} \dot{\gamma}(t) \\ \ddot{\gamma}(t) \end{pmatrix}\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \\ &= \det\begin{pmatrix} \dot{\gamma}(t) \\ \ddot{\gamma}(t) \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}\right). \end{aligned}$$

Podemos entonces escribir la función de curvatura en términos de t como

$$k(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} \dot{\gamma}(t) \\ \ddot{\gamma}(t) \end{pmatrix}}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}.$$

Si $\gamma(t)$ tiene coordenadas $(x(t), y(t))$, se tiene

$$k(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}.$$

Ejemplo 1.31. *Consideremos la circunferencia de radio 3 con centro en el origen, parametrizada por la función*

$$\gamma(t) = (3\cos 2t, 3\operatorname{sen} 2t).$$

Por un cálculo directo se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= (-6\operatorname{sen} 2t, 6\cos 2t) \\ \ddot{\gamma}(t) &= (-12\cos 2t, -12\operatorname{sen} 2t) \end{aligned}$$

lo que implica que $\|\dot{\gamma}(t)\| = 6$ *y en consecuencia la curvatura en* $\gamma(t)$ *es*

$$k(t) = \frac{\begin{vmatrix} -6\operatorname{sen} 2t & 6\cos 2t \\ -12\cos 2t & -12\operatorname{sen} 2t \end{vmatrix}}{6^3} = \frac{1}{3},$$

como ya se había obtenido antes. ▷

1.7 Curvas espaciales

Ahora generalizaremos algunas propiedades de las curvas planas al caso de las curvas espaciales. Estas propiedades caracterizan de manera total a las curvas, salvo isometrías. El concepto de isometría proviene de la generalización del concepto de congruencia de figuras planas de lados rectos estudiado en los niveles básicos de geometría euclidiana. Allí se define que dos figuras geométricas planas de lados rectos son congruentes si y sólo si sus lados y ángulos correspondientes son iguales. En nuestro caso, un polígono estará formado por segmentos de curvas espaciales y la definición de congruencia puede extenderse a este caso.

Dada una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ regular parametrizada por $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, diremos que la **orientación** de Γ va del punto $\gamma(a) \in \Gamma$ al punto $\gamma(b) \in \Gamma$, y que está inducida por la orientación natural del intervalo $[a,b]$, el cual denotaremos mediante $[a,b]^+$ para enfatizar que está orientado. (Véase la figura 1.9.)

Distinguimos a la curva orientada de esta forma por Γ^+. Por supuesto, esto hace que Γ^+ esté orientada por el vector tangente $\dot{\gamma}(t)$.

Supongamos que el parámetro t depende de un nuevo parámetro $u \in [c,d]$, esto es $t = t(u)$, donde t es un difeomorfismo $t : [c,d] \to [a,b]$.

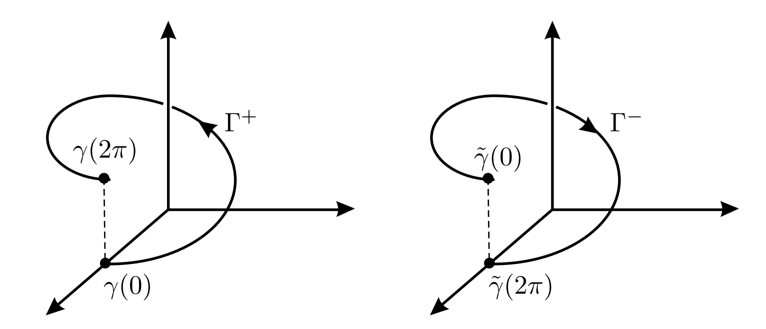


Figura 1.9: Orientación de una espira de la hélice en $\mathbb{R}^3$.

Entonces podemos reparametrizar a Γ aplicando la composición $\widetilde{\gamma}(u) = \gamma(t(u))$. Dicho de otra forma, la curva Γ puede parametrizarse mediante la función $\widetilde{\gamma} : [c, d] \to \mathbb{R}^3$.

Ejemplo 1.32. *Sea Γ la primera espira de una hélice de paso 2π parametrizada por*

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$$

en el intervalo $[0, 2\pi]$. γ orienta a Γ^+ del punto $(1, 0, 0)$ al punto $(1, 0, 2\pi)$.

Podemos reparametrizar a Γ usando la biyección $t = 2\pi - u$, definida para $u \in [0, 2\pi]$; así,

$$\widetilde{\gamma}(u) = (\cos(2\pi - u), \operatorname{sen}(2\pi - u), 2\pi - u).$$

En este caso, $\widetilde{\gamma}$ invierte la orientación de Γ, pues $\widetilde{\gamma}(0) = (1, 0, 2\pi)$ es ahora el punto inicial y $\widetilde{\gamma}(2\pi) = (1, 0, 0)$ es el punto final. Observemos que la función $t : [0, 2\pi] \to [0, 2\pi]$, dada por $t = 2\pi - u$ tiene derivada $dt/du = -1 < 0$. La figura 1.9 ilustra esta situación. ▷

La última observación del ejemplo precedente no debe extrañarnos. De hecho, el siguiente resultado impone condiciones sobre la derivada de la función de cambio de parámetros para que se preserve la orientación.

Lema 1.33. *Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de la curva Γ que induce una orientación Γ^+. Si el parámetro t de γ se puede expresar como una función de un nuevo parámetro $t = t(u)$, con $t : [c, d] \to [a, b]$, entonces la reparametrización dada por $\widetilde{\gamma}(u) = \gamma(t(u))$ satisface lo siguiente:*

a. *Conserva la orientación de* Γ^+ *si y sólo si* $dt/du > 0$ *para todo* u *en* $[c,d]$.

b. *Invierte la orientación de* Γ^+ *si y sólo si* $dt/du < 0$ *para todo* u *en* $[c,d]$.

Demostración. Por la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{d\widetilde{\gamma}}{du}(u) = \dot{\gamma}(t)\frac{dt}{du}.$$

Esto nos indica que los vectores $d\widetilde{\gamma}/du$ y $\dot{\gamma}$ son paralelos. La cantidad dt/du indica el sentido de cada uno, y por lo tanto la orientación. □

Sea s el parámetro de longitud de arco para la curva orientada $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$. Asociaremos a esta curva un conjunto de vectores $\{v, n, b\}$ llamado el **triedro de Serret-Frenet** como sigue:

1. El vector $v(s) = \gamma'(s)$ es el vector velocidad dado por el lema 1.19, con $\|v(s)\| = 1$.

2. Consideremos el vector aceleración $a(s) = \gamma''(s)$. Veamos que $a(s)$ es ortogonal a $v(s)$ en cada punto de la curva $\gamma(s)$: Como $\|v(s)\|^2 = 1$, entonces $1 = \langle v(s),\, v(s)\rangle$, de donde

$$0 = \frac{d}{ds}\langle v(s),\, v(s)\rangle = 2\langle v'(s),\, v(s)\rangle = 2\langle a(s), v(s)\rangle$$

con lo que $\langle a(s),\, v(s)\rangle = 0$, lo que prueba la afirmación.

Al normalizar el vector aceleración $a(s)$ se obtiene el vector $n(s)$ dado por

$$n(s) = \frac{a(s)}{\|a(s)\|} = \frac{v'(s)}{\|v'(s)\|} = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}.$$

Observemos que $n(s)$ es un vector unitario ortogonal a $v(s)$.

3. El tercer vector del triedro es el vector unitario $b(s)$ obtenido mediante el producto cruz de los dos vectores anteriores:

$$b(s) = v(s) \times n(s).$$

Definición 1.34. El conjunto ordenado formado por los vectores ortonormales

$$\{v(s),\, n(s),\, b(s)\}_{\gamma(s)}$$

se llama el **triedro de Serret-Frenet** en el punto $\gamma(s)$. El vector $v(s)$ es el **vector tangente** en el punto $\gamma(s)$, el vector $n(s)$ se llama el **normal principal**, y $b(s)$ se llamará el **binormal**.

De la definición de v, n y b, se tiene que si γ es una curva regular y diferenciable, entonces los vectores dependen en forma diferenciable de s. Además es claro que $\{v, n, b\}$ generan al espacio tangente $\mathbb{R}^3_{\gamma(s)}$ para cada punto $\gamma(s)$ sobre la curva. (Véase la figura 1.10.)

De la construcción de v, n y b se tiene el siguiente

Lema 1.35. *Son válidas las siguientes igualdades en cada punto $\gamma(s)$:*

$$v \times n = b, \quad n \times b = v, \quad b \times v = n.$$

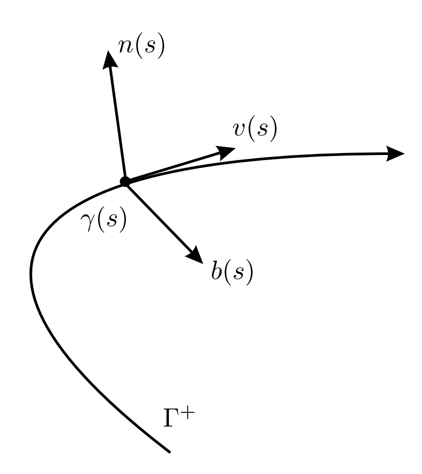


Figura 1.10: Triedro de Serret-Frenet.

El triedro de Serret-Frenet es una herramienta geométrica muy importante que describe la forma en que la curva γ realiza su trayecto en el

espacio, pues el triedro se mueve según lo haga la curva. Así, podemos estudiar cómo se mueve una curva en el espacio analizando las variaciones del triedro respecto de la variable s. De la definición de n tenemos que

$$n(s) = \frac{a(s)}{\|a(s)\|} = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$$

con lo que $a(s) = \|a(s)\|n = \|v'(s)\|n = kn$, donde $k = \|v'(s)\|$ es un número escalar no negativo.

Ahora generalizamos la definición de curvatura para el caso de una curva espacial.

Definición 1.36. Dada una curva regular $\gamma = \gamma(s)$ se define la **curvatura** de γ en $\gamma(s)$, denotada por $k = k(s)$, como

$$k(s) = \|\gamma''(s)\|.$$

De esta manera,

$$v'(s) = a(s) = k(s)\, n(s);$$

o en forma breve,

$$\frac{dv}{ds} = kn,$$

lo que nos indica la variación de v respecto a s.

Procedemos ahora a calcular b'. Observemos que b' es ortogonal a b, pues como $\|b(s)\| = 1$ para cualquier s, tenemos que

$$0 = \frac{d}{ds}\|b\|^2 = \frac{d}{ds}\langle b(s),\, b(s)\rangle = 2\langle b'(s),\, b(s)\rangle$$

Por otro lado, ya que $b = v \times n$, se tiene que

$$b' = \frac{db}{ds} = \frac{d}{ds}(v \times n) = (v' \times n) + (v \times n').$$

De la ecuación $v' = kn$ se obtiene entonces

$$b' = ((kn) \times n) + (v \times n') = k(n \times n) + (v \times n') = v \times n',$$

lo que nos dice que $b' = v \times n'$, es decir, b' es ortogonal a v.

De esta manera, b' es ortogonal a v y a b, lo que implica que está en la dirección de n; es decir, existe una cantidad escalar $\tau(s)$ tal que

$$\frac{db}{ds} = b' = \tau\, n.$$

Definición 1.37. Si $\gamma(s)$ es una curva regular, para cada $\gamma(s)$ se define el escalar $\tau = \tau(s)$ como la **torsión** de la curva γ en ese punto.

Por último, calculamos la variación de dn/ds. Puesto que $n = b \times v$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{dn}{ds} &= (b' \times v) + (b \times v') = ((\tau n) \times v) + (b \times (kn)) \\ &= \tau(n \times v) + k(b \times n) = \tau(-b) + k(-v) = -\tau b - kv.\end{aligned}$$

Las fórmulas obtenidas para las variaciones del triedro implican el siguiente importante resultado.

Teorema 1.38 (de Serret-Frenet)**.** *Sea $\gamma(s)$ una curva regular diferenciable orientada definida en $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y parametrizada por longitud de arco. Entonces para cada punto $\gamma(s)$ se puede definir el triedro de Serret-Frenet $\{v,n,b\}$ y tales vectores satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{aligned} v' &= \quad\quad kn, \\ n' &= -kv \quad\quad -\tau b, \\ b' &= \quad\quad \tau n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Lema 1.39. *La torsión $\tau(s)$ en un punto $\gamma(s)$ se calcula mediante la fórmula*

$$\tau = \tau(s) = -\frac{(\gamma'(s),\, \gamma''(s),\, \gamma'''(s))}{\|\gamma''(s)\|^2},$$

donde $(\ ,\ ,\ )$ es el triple producto escalar.

Demostración. Recordemos que la curvatura de γ en $\gamma(s)$ está dada por $k = \|\gamma''(s)\|$. Consideremos ahora las igualdades

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= v, \\ \gamma''(s) &= v' = kn, \\ \gamma'''(s) &= k'n + kn' = k'n + k(-\tau b - kv) = k'n - k\tau b - k^2 v,\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha utilizado la segunda ecuación en (1.1).

Al calcular el triple producto escalar se tiene que

$$
\begin{aligned}
(\gamma', \gamma'', \gamma''') &= \begin{vmatrix} \gamma' \\ \gamma'' \\ \gamma''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v \\ kn \\ k'n - k\tau b - k^2 v \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} v \\ kn \\ k'n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} v \\ kn \\ k\tau b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} v \\ kn \\ k^2 v \end{vmatrix} \\
&= -k^2\tau \begin{vmatrix} v \\ n \\ b \end{vmatrix} = -k^2\tau(v, n, b) = -k^2\tau,
\end{aligned}
$$

donde el triple producto escalar $(v, n, b) = 1$ debido a la orientación de los vectores. Por lo tanto,

$$
\tau = -\frac{(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{k^2} = -\frac{(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma''\|^2}.
$$

$\square$

Ejemplo 1.40. *Considere la recta que pasa por $\eta \in \mathbb{R}^3$ con vector director ξ, parametrizada por*

$$
\gamma(s) = \eta + s\xi,
$$

donde $\|\xi\| = 1$. Al calcular las derivadas se tiene

$$
\gamma'(s) = \xi, \quad \gamma''(s) = 0, \quad \gamma'''(s) = 0,
$$

lo que implica que la curvatura k y la torsión τ de la recta son constantes e iguales a 0. $\triangleright$

Definición 1.41. Definimos el **radio de curvatura** R de la curva Γ parametrizada por longitud de arco s como

$$
R = \frac{1}{k}.
$$

El radio de curvatura de una circunferencia de radio $\widetilde{R}$ es $R = \widetilde{R}$, mientras que el de una recta es $R = \infty$.

Ahora estudiaremos la curvatura y la torsión de una curva Γ con una parametrización arbitraria $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Supongamos que el parámetro t se escribe en términos de la longitud de arco $t(s)$, de modo que $t : [c, d] \to [a, b]$ y $\frac{dt}{ds} > 0$. Entonces, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt}\frac{dt}{ds} = \dot{\gamma}\frac{dt}{ds}, \\ \gamma''(s) &= \frac{d^2\gamma}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\gamma}{dt}\,\frac{d^2t}{ds^2} = \ddot{\gamma}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \dot{\gamma}\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \gamma'''(s) &= \frac{d^3\gamma}{dt^3}\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\frac{d^2\gamma}{dt^2}\,\frac{d^2t}{ds^2}\,\frac{dt}{ds} + \frac{d\gamma}{dt}\left(\frac{d^3t}{ds^3}\right) \\ &= \dddot{\gamma}\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\ddot{\gamma}\frac{d^2t}{ds^2}\frac{dt}{ds} + \dot{\gamma}\left(\frac{d^3t}{ds^3}\right), \end{aligned}$$

donde el punto denota la derivada respecto del parámetro t.

Calculemos los vectores ortogonales a $\dot{\gamma}$ y $\ddot{\gamma}$ con el parámetro t. De las relaciones anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma'(s) \times \gamma''(s) &= \left(\dot{\gamma}\frac{dt}{ds}\right) \times \left(\ddot{\gamma}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \dot{\gamma}\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right)\right) \\ &= \left(\dot{\gamma}\frac{dt}{ds} \times \ddot{\gamma}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\right) + \left(\left(\dot{\gamma}\frac{dt}{ds}\right) \times \left(\dot{\gamma}\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right)\right)\right) \\ &= (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma})\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + (\dot{\gamma} \times \dot{\gamma})\,\frac{dt}{ds}\,\frac{d^2t}{ds^2} = (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma})\left(\frac{dt}{ds}\right)^3. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$b = v \times n = \gamma' \times \frac{\gamma''}{\|\gamma''\|} = \frac{\gamma' \times \gamma''}{k},$$

de donde

$$kb = \gamma' \times \gamma'' = \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}.$$

De la igualdad

$$\gamma' = \frac{dt}{ds}\dot{\gamma}$$

y $\|\gamma'\| = 1$, obtenemos

$$\frac{dt}{ds} = \left|\frac{dt}{ds}\right| = \frac{1}{\|\dot\gamma\|}.$$

De esta manera,

$$kb = \frac{\dot\gamma \times \ddot\gamma}{\|\dot\gamma\|^3}.$$

Ya que $\|b\| = 1$, tomando normas de cada lado se concluye que

$$k = \|k\, b\| = \frac{\|\dot\gamma \times \ddot\gamma\|}{\|\dot\gamma\|^3},$$

lo que expresa la curvatura k en función de $\dot\gamma$ y $\ddot\gamma$.

La torsión τ de la curva expresada en términos del parámetro t viene dada por la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned}
\tau &= -\frac{(\gamma',\, \gamma'',\, \gamma''')}{k^2} = -\frac{1}{k^2}\begin{vmatrix} \gamma' \\ \gamma'' \\ \gamma''' \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{k^2}\begin{vmatrix} \dot\gamma\frac{dt}{ds} \\ \ddot\gamma\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \dot\gamma\frac{d^2t}{ds^2} \\ \dddot\gamma\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\ddot\gamma\frac{d^2t}{ds^2}\,\frac{dt}{ds} + \dot\gamma\frac{d^3t}{ds^3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{k^2}\begin{vmatrix} \dot\gamma\frac{dt}{ds} \\ \ddot\gamma\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \\ \dddot\gamma\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \end{vmatrix} \\
&= -\frac{\left(\frac{dt}{ds}\right)^6}{k^2}(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma) = -\frac{1}{k^2}\frac{(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma)}{\|\dot\gamma\|^6} \\
&= -\frac{(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma)}{\|\dot\gamma\|^6}\left(\frac{\|\dot\gamma\|^3}{\|\dot\gamma \times \ddot\gamma\|}\right)^2 = -\frac{(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma)}{\|\dot\gamma \times \ddot\gamma\|^2}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.42. *Sea Γ la hélice definida mediante*

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt).$$

Procedamos a calcular su curvatura y torsión en cualquier punto $\gamma(t)$.

Calculamos las tres primeras derivadas de γ, obteniendo

$$\begin{aligned}
\dot\gamma(t) &= (-a\operatorname{sen} t, a\cos t, b), \\
\ddot\gamma(t) &= (-a\cos t, -a\operatorname{sen} t, 0), \\
\dddot\gamma(t) &= (a\operatorname{sen} t, -a\cos t, 0).
\end{aligned}$$

Para calcular la curvatura, utilizamos la fórmula

$$k = \frac{\|\dot\gamma \times \ddot\gamma\|}{\|\dot\gamma(t)\|^3}.$$

Primero calculamos $\dot\gamma \times \ddot\gamma$ *y tenemos*

$$\dot\gamma \times \ddot\gamma = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a\operatorname{sen} t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix} = (ab\operatorname{sen} t,\ -ab\cos t,\ a^2),$$

lo que implica que

$$\|\dot\gamma \times \ddot\gamma\| = a\sqrt{a^2+b^2}.$$

Como $\|\gamma'(t)\|^3 = (\sqrt{a^2+b^2})^3$, *se sigue que la curvatura en el punto* $\gamma(t)$ *es*

$$k(t) = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(\sqrt{a^2+b^2})^3} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Por otro lado,

$$(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma) = \begin{vmatrix} -a\operatorname{sen} t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\operatorname{sen} t & 0 \\ a\operatorname{sen} t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} -a\cos t & -a\operatorname{sen} t \\ a\operatorname{sen} t & -a\cos t \end{vmatrix} = a^2 b,$$

con lo que

$$\tau(t) = -\frac{(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma)}{\|\dot\gamma \times \ddot\gamma\|^2} = -\frac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)} = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

es la torsión en $\gamma(t)$. ▷

1.8 El teorema fundamental de la teoría de las curvas

Hasta aquí hemos encontrado dos características propias de las curvas: la curvatura y la torsión. De hecho, cualquier curva espacial (o en el plano) se puede obtener curvando y torciendo una recta. Esto es, la curvatura y la torsión de una curva definen en forma total a una curva. De manera precisa, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.43 (fundamental de la teoría de las curvas). *Sean $k, \tau : J \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase C^1 definidas en un intervalo J, con $k(s) > 0$. Entonces existe una curva regular $\gamma : J \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1, parametrizada por longitud de arco s tal que su curvatura es k, y su torsión es τ. Más aún, si $\widetilde{\gamma}(s)$ es otra curva con las mismas curvatura y torsión, entonces existe una isometría de $\mathbb{R}^3$ que lleva γ en $\widetilde{\gamma}$.*

Demostración. Usando las coordenadas del triedro de Serret-Frenet, $v = (v^1, v^2, v^3)$, $n = (n^1, n^2, n^3)$ y $b = (b^1, b^2, b^3)$, las ecuaciones de Serret-Frenet (1.1) pueden ser vistas como un sistema de nueve ecuaciones diferenciales no autónomas definidas en $J \times \mathbb{R}^9$ dado por

$$\begin{aligned}
\frac{dv^i}{ds} &= k(s)n^i = f_i(s, v^1, v^2, \ldots, b^2, b^3),\\
\frac{dn^i}{ds} &= -k(s)v^i - \tau(s)b^i = g_i(s, v^1, v^2, \ldots, b^2, b^3),\\
\frac{db^i}{ds} &= \tau(s)n^i = h_i(s, v^1, v^2, \ldots, b^2, b^3),
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2, 3$, donde las funciones $f_i, g_i, h_i : J \times \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}$ son lineales con respecto de las variables vectoriales v, n, b y son al menos de clase C^2 con respecto del parámetro s.

Por el teorema de unicidad y existencia para ecuaciones diferenciales no autónomas (véase, por ejemplo, [1]), dadas las condiciones iniciales $s_0 \in J$, y el punto $(v_0^1, v_0^2, \ldots, b_0^2, b_0^3) \in \mathbb{R}^9$, existe un intervalo abierto $(a, b) \subset J$ que contiene a s_0 y una única curva diferenciable $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^9$ tal que

$$\begin{aligned}
\alpha(s_0) &= (v_0^1, v_0^2, \ldots, b_0^1, b_0^2, b_0^3),\\
\frac{d\alpha}{ds} &= (f_1(s, \alpha(s)),\ f_2(s, \alpha(s)), \ldots, h_2(s, \alpha(s)),\ h_3(s, \alpha(s)));
\end{aligned}$$

es decir, $\alpha = \alpha(s)$ es solución del sistema de ecuaciones de Serret-Frenet. Lo anterior prueba que dados $s_0 \in J$, y un triedro $\{v_0, n_0, b_0\}$ en $\mathbb{R}^3$, existe una familia de triedros $\{v(s), n(s), b(s)\}$, $s \in (a, b) \subset J$, tales que $v(s_0) = v_0$, $n(s_0) = n_0$, $b(s_0) = b_0$.

Tomamos entonces la familia de triedros $\{v(s), n(s), b(s)\}$ con $s \in (a, b)$ obtenida mediante la anterior ecuación diferencial no autónoma. Si consideramos las condiciones iniciales de ortonormalidad para tal familia, dadas

por

$$\begin{array}{lll} \langle v(s),\, n(s)\rangle \equiv 0, & \langle v(s),\, b(s)\rangle \equiv 0, & \langle n(s),\, b(s)\rangle \equiv 0, \\ \langle v(s),\, v(s)\rangle \equiv 1, & \langle n(s),\, n(s)\rangle \equiv 1, & \langle b(s),\, b(s)\rangle \equiv 1, \end{array}$$

una sustitución simple nos muestra que la familia de triedros con estas condiciones satisface el sistema no autónomo de ecuaciones diferenciales **isométrico de Serret-Frenet** dado por

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\langle v,n\rangle &= k(s)\langle n,n\rangle - k(s)\langle v,v\rangle - \tau(s)\langle v,b\rangle, \\ \frac{d}{ds}\langle v,b\rangle &= k(s)\langle n,b\rangle + \tau(s)\langle v,n\rangle, \\ \frac{d}{ds}\langle n,b\rangle &= -k(s)\langle v,b\rangle - \tau(s)\langle b,b\rangle + \tau(s)\langle n,n\rangle, \\ \frac{d}{ds}\langle v,v\rangle &= 2k(s)\langle v,n\rangle, \\ \frac{d}{ds}\langle n,n\rangle &= -2k(s)\langle n,v\rangle - 2\tau(s)\langle n,b\rangle, \\ \frac{d}{ds}\langle b,b\rangle &= 2\tau(s)\langle b,n\rangle. \end{aligned}$$

El teorema de existencia y unicidad nos garantiza la ortonormalidad de la familia $\{v(s), n(s), b(s)\}$ en todo el intervalo (a, b).

Una vez que tenemos una solución del sistema en el intervalo (a, b), definimos la curva espacial

$$\gamma(s) = \int_0^s v(\sigma)d\sigma,$$

donde la integración es realizada coordenada a coordenada. Es claro que $\gamma'(s) = v(s)$. Observemos que $\|\gamma'(s)\| = \|v(s)\| \equiv 1$, de modo que s es el parámetro de longitud de arco de γ. Por la primera ecuación de Serret-Frenet en (1.1),

$$\gamma''(s) = v'(s) = k(s)n(s),$$

lo que nos dice que $k(s)$ es la curvatura de γ en $\gamma(s)$.

Utilizamos el mismo procedimiento del lema 1.39 para ver que la torsión de γ se calcula mediante

$$\tau(s) = -\frac{(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma''(s)\|^2} = -\frac{(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{k(s)^2}$$

lo que prueba la existencia de una curva γ con curvatura k y torsión τ.

Antes de demostrar la unicidad, observemos que la curvatura y la torsión son invariantes bajo isometrías. Supongamos ahora que las curvaturas y torsiones de las curvas γ y $\widetilde{\gamma}$ coinciden, es decir, $k(s) = \widetilde{k}(s)$ y $\tau(s) = \widetilde{\tau}(s)$, donde k y τ son la curvatura y la torsión de γ, y $\widetilde{k}, \widetilde{\tau}$ las de $\widetilde{\gamma}$. Sean $\{v_0, n_0, b_0\}$ y $\{\widetilde{v}_0, \widetilde{n}_0, \widetilde{b}_0\}$ los triedros de Serret-Frenet respectivos en $\gamma(s_0)$ y $\widetilde{\gamma}(s_0)$. Mediante la aplicación de una isometría podemos suponer que $\widetilde{\gamma}(s_0) = \gamma(s_0)$ y, además, que $v(s_0) = \widetilde{v}(s_0)$, $n(s_0) = \widetilde{n}(s_0)$, $b(s_0) = \widetilde{b}(s_0)$. Por las fórmulas de Serret-Frenet para cada triedro, tenemos los sistemas

$$\begin{array}{ll} \frac{dv}{ds} = k(s)n, & \frac{d\widetilde{v}}{ds} = k(s)\widetilde{n}, \\ \frac{dn}{ds} = -k(s)v - \tau(s)b, & \frac{d\widetilde{n}}{ds} = -k(s)\widetilde{v} - \tau(s)\widetilde{b}, \\ \frac{db}{ds} = \tau(s)n, & \frac{d\widetilde{b}}{ds} = \tau(s)\widetilde{n}, \end{array}$$

Si consideramos la función distancia

$$D(s) = \|v(s) - \widetilde{v}(s)\|^2 + \|n(s) - \widetilde{n}(s)\|^2 + \|b(s) - \widetilde{b}(s)\|^2,$$

es claro que $D(s_0) = 0$. Usando las fórmulas de Serret-Frenet para cada triedro, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dD}{ds}(s) &= \frac{d}{ds}\Big(\langle v - \widetilde{v}, v - \widetilde{v}\rangle + \langle n - \widetilde{n}, n - \widetilde{n}\rangle + \langle b - \widetilde{b}, b - \widetilde{b}\rangle\Big) \\ &= 2\Big(\langle v - \widetilde{v}, v' - \widetilde{v}'\rangle + \langle n - \widetilde{n}, n' - \widetilde{n}'\rangle + \langle b - \widetilde{b}, b' - \widetilde{b}'\rangle\Big) \\ &= 2(k(s)\langle v - \widetilde{v}, n - \widetilde{n}\rangle - k(s)\langle n - \widetilde{n}, v - \widetilde{v}\rangle \\ &\quad -\tau(s)\langle n - \widetilde{n}, b - \widetilde{b}\rangle + \tau(s)\langle b - \widetilde{b}, n - \widetilde{n}\rangle) = 0, \end{aligned}$$

lo que nos dice que $D(s)$ es constante e igual a 0. Esto implica que $v(s) = \widetilde{v}(s)$, $n(s) = \widetilde{n}(s)$ y $b(s) = \widetilde{b}(s)$ para todo $s \in (a, b)$.

Ya que $\gamma'(s) = v(s) = \widetilde{\gamma}'(s)$ en todo el intervalo (a, b), se tiene $\gamma(s) = \widetilde{\gamma}(s) + \xi$ para algún vector $\xi \in \mathbb{R}^3$. Pero como $\gamma(s_0) = \widetilde{\gamma}(s_0)$, entonces $\xi = 0$; es decir, $\gamma(s) = \widetilde{\gamma}(s)$ en todo (a, b), lo que termina la prueba de la unicidad y del teorema. □

1.9 Planos osculador, normal y rectificador

Dada una curva Γ parametrizada por $\gamma = \gamma(s)$, tenemos que en cada punto $\gamma(s)$ el espacio tangente $T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^3$ está generado por el triedro de Serret-Frenet

y existen tres planos coordenados en $T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^3$ muy útiles para describir geométricamente a la curva:

a. El **plano normal** a la curva γ en $\gamma(s_0)$, que pasa por $\gamma(s_0)$ y contiene a los vectores normal n y binormal b. Su ecuación vectorial es

$$\langle W - \gamma(s_0),\, v(s_0)\rangle = 0 \quad \text{o} \quad \langle W - \gamma(s_0),\, \gamma'(s_0)\rangle = 0.$$

b. El **plano rectificador** por $\gamma(s_0)$, que pasa por $\gamma(s_0)$ y es ortogonal al normal principal n. Su ecuación vectorial es

$$\langle W - \gamma(s_0),\, n(s_0)\rangle = 0 \quad \text{o} \quad \langle W - \gamma(s_0),\, \gamma''(s_0)\rangle = 0.$$

c. El **plano osculador** por $\gamma(s_0)$, que pasa por $\gamma(s_0)$ y contiene a los vectores $v(s_0)$ y $n(s_0)$ (es decir, es normal al binormal b). Su ecuación vectorial es

$$\langle W - \gamma(s_0),\, b(s_0)\rangle = 0 \quad \text{o} \quad \langle W - \gamma(s_0),\, [\gamma'(s_0),\, \gamma''(s_0)]\rangle = 0,$$

o bien, si usamos el triple producto escalar:

$$(W - \gamma(s_0),\, \gamma'(s_0),\, \gamma''(s_0)) = 0.$$

La figura 1.11 ilustra los tres planos obtenidos a través del triedro de Serret-Frenet.

Dada una curva $\gamma(s)$ y su correspondiente triedro móvil, podemos proyectar la curva en los planos osculador, normal y rectificador (al menos cerca del punto $\gamma(s_0)$) para estudiar la geometría de la curva de tal punto.

Sean $\gamma(s)$ una curva diferenciable y $s_0 \in [a, b]$. El desarrollo de Taylor de γ alrededor de s_0 viene dado por

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + \gamma'(s_0)h + \frac{1}{2}\gamma''(s_0)h^2 + \frac{1}{6}\gamma'''(s_0)h^3 + O(h^4),$$

donde $h = s - s_0$ y $O(h^4)$ es una cantidad de orden h^4 cuando $h \simeq 0$.

Podemos trasladar el origen de $\mathbb{R}$ a s_0, el origen de $\mathbb{R}^3$ a $\gamma(s_0)$ y hacer una rotación de ejes en $\mathbb{R}^3$ de modo que $v = (1, 0, 0)$, $n = (0, 1, 0)$ y $b = (0, 0, 1)$.

Así, en las nuevas coordenadas (x, y, z) se tiene que

$$\begin{aligned}
\gamma(s) &= \gamma'(0)s + \frac{1}{2}\gamma''(0)s^2 + \frac{1}{6}\gamma'''(0)s^3 + O(s^4) \\
&= v(0)s + \frac{1}{2}k(0)n(0)s^2 \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(k'(0)n(0) - k(0)\tau(0)\,b(0) - k(0)^2\,v(0)\right)s^3 + O(s^4) \\
&= (1,0,0)s + \frac{1}{2}k(0,1,0)s^2 \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(k'(0,1,0) - k\tau(0,0,1) - k^2(1,0,0)\right)s^3 + O(s^4) \\
&= \left(s - \frac{k^2}{6}s^3 + O(s^4), \frac{k}{2}s^2 + \frac{k'}{6}s^3 + O(s^4), -\frac{k\tau}{6}s^3 + O(s^4)\right);
\end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned}
x(s) &= s - \frac{k^2 s^3}{6} + O(s^4), \\
y(s) &= \frac{ks^2}{2} + \frac{k' s^3}{6} + O(s^4), \\
z(s) &= -\frac{k\tau}{6}s^3 + O(s^4).
\end{aligned}$$

Proyectaremos la curva en los planos mencionados, tomando en cuenta sólo el primer término no constante del desarrollo de Taylor alrededor de $s = 0$.

a. Proyección en el **plano normal**. Como el plano es generado por n y b, consideramos las coordenadas y y z, dadas por

$$y = \frac{ks^2}{2} \quad \text{y} \quad z = -\frac{k\tau}{6}s^3.$$

Despejamos s en estas ecuaciones e igualamos las expresiones resultantes para obtener

$$\frac{(2y)^3}{k^3} = \frac{(6z)^2}{(-k\tau)^2},$$

o en forma equivalente,

$$y^3 = \frac{9kz^2}{2\tau},$$

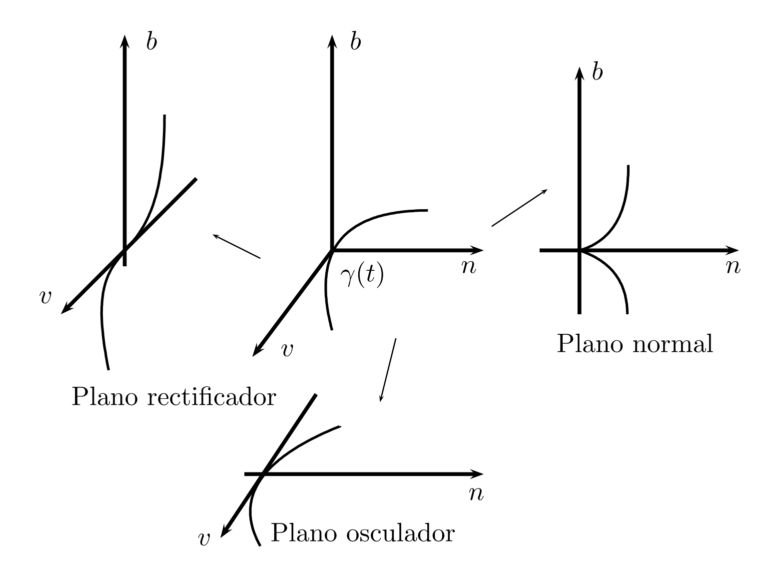


Figura 1.11: Planos **a.** Normal. **b.** Osculador. **c.** Rectificador.

que en el plano (y, z) corresponde a una cúspide. (Véase la figura 1.11a.)

b. Proyección en el **plano osculador**. En este caso se considera la proyección de $\gamma(s)$ en las coordenadas x, y:

$$x = s \quad \text{y} \quad y = \frac{ks^2}{2}.$$

Al sustituir x en la segunda ecuación, nos queda

$$y = \frac{k}{2}x^2$$

que es la ecuación de una párabola que se abre hacia arriba, pues $k > 0$. (Véase la figura 1.11b.)

c. Proyección en el **plano rectificador**. Ya que aquí se consideran sólo

las variables x y z, en este caso tenemos

$$x = s \quad \text{y} \quad z = -\frac{k\tau}{6}s^3,$$

que nos lleva a una ecuación cúbica en tal plano:

$$z = -\frac{k\tau}{6}x^3.$$

Como $k > 0$, entonces la gráfica de la cúbica en el plano xz depende del signo de la **torsión**. (Véase la figura 1.11c.)

Definiremos ahora un triedro de Serret-Frenet para una curva parametrizada con el parámetro arbitrario t, obteniendo tres vectores que no necesariamente son unitarios.

Corolario 1.44. *El triedro de Serret-Frenet tiene asociados tres vectores*

$$\{V, B, N\}$$

paralelos respectivamente a $\{v, b, n\}$ *dados por las ecuaciones*

$$\begin{array}{lcll} V & = & \dot{\gamma}(t) & \textbf{(tangente)} \\ B & = & \dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) & \textbf{(binormal)} \\ N & = & B \times V & \textbf{(normal principal)} \end{array}$$

Ellos forman el **triedro de Serret-Frenet** *para una parametrización arbitraria por el parámetro* t *de la curva* $\gamma = \gamma(t)$*.*

Se tiene que el vector v es paralelo a V debido a que

$$\gamma'(s) = \dot{\gamma}(t)\frac{dt}{ds}.$$

Por otro lado, el vector b es paralelo a B debido a la relación puntual

$$b = \frac{1}{k}\frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$$

Por último, debido a que $N = B \times V$ y $n = b \times v$ entonces N es paralelo a n.

Las definiciones de los planos **rectificador**, **normal** y **osculador** en un punto de una curva espacial parametrizada por un parámetro arbitrario son semejantes a las ya dadas. Damos sólo un ejemplo.

Ejemplo 1.45. *Dar la ecuación del plano osculador de la hélice del ejemplo 1.42, en cualquier punto* $\gamma(t_0)$.

Dado $t_0 \in \mathbb{R}$*, tenemos que el plano osculador* P_0 *en el punto* $\gamma(t_0) = (a\cos t_0, a \operatorname{sen} t_0, b\, t_0)$ *es ortogonal al vector binormal* $B = \dot\gamma(t_0) \times \ddot\gamma(t_0)$.

Como ya se ha calculado en el ejemplo 1.42,

$$\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t) = (ab \operatorname{sen} t, ab\cos t, a^2)$$

entonces $B(t_0) = (ab \operatorname{sen} t_0, ab\cos t_0, a^2)$.

Por lo tanto, la ecuación del plano osculador P_0 *por* $\gamma(t_0)$ *en las coordenadas* x, y, z*, está dada por*

$$\begin{aligned} 0 &= \langle B(t_0), (x, y, z) - \gamma(t_0)\rangle \\ &= \langle (ab \operatorname{sen} t_0, ab\cos t_0, a^2), (x - a\cos t_0,\ y - a \operatorname{sen} t_0,\ z - bt_0)\rangle \\ &= ab \operatorname{sen} t_0 (x - a\cos t_0) + ab\cos t_0 (y - a \operatorname{sen} t_0) + a^2(z - bt_0). \end{aligned}$$

Como $a \neq 0$*, la ecuación*

$$(b \operatorname{sen} t_0)x + (b\cos t_0)y + a^2 z = ab + 2ab\cos t_0 \operatorname{sen} t_0$$

define al plano osculador P_0. ▷

Observamos que en el caso de las curvas espaciales no podemos hablar de la curvatura con signo para la curva, ya que carecemos de un plano de referencia que la contenga.

1.10 Ejercicios

1. ¿Cuáles de las siguientes curvas son regulares? Haga un dibujo de la traza cuando sea posible.

   (a) $\gamma(t) = (3\operatorname{sen}^2 t,\ 2\cos^2 t)$.

   (b) $\gamma(t) = (t, t^2 + 1, t - 1)$.

   (c) La curva intersección de los cilindros $x = z^3$ y $y^2 = 1 - x$, utilizando $x = t$ como parámetro.

   (d) $\gamma(t) = (\ln t, 1/(1 + t))$.

(e) La curva dada por la intersección de $x^2 + y^2 = 1$ y $y^2 + z^2 = 1$, $y \neq \pm 1$, utilizando $x = t$ como parámetro.

2. Para la curva diferenciable $\gamma = \gamma(t)$ definida en el intervalo $[a, b]$ y el punto $\gamma(t_0)$ se dice que la recta tangente a γ en t_0 es la recta que pasa por tal punto con vector director $\dot{\gamma}(t_0)$. El plano normal a γ en tal punto es el plano por $\gamma(t_0)$ con normal $\dot{\gamma}(t_0)$. Calcule las ecuaciones de la recta tangente y el plano normal a cada curva en el punto t_0 dado.

   (a) $\gamma(t) = (1 + t, -t^2, 1 + t^3), \quad t_0 = 2.$
   (b) $\gamma(t) = (3 \cosh 2t, 3 \operatorname{senh} 2t, 6t), \quad t_0 = 0.$
   (c) $\gamma(t) = (2t, t, \ln t)$, en el punto $(4, 2, \ln 2)$.

3. Demuestre que las rectas tangentes a la curva $\gamma(t) = \left(\frac{2}{3}t, t^2, t^3\right)$ forman un ángulo constante con el vector $(1, 0, 1)$.

4. Calcule la longitud de arco de cada una de las siguientes curvas.

   (a) $\gamma(t) = (3 \cosh 2t, 3 \operatorname{senh} 2t, 6t)$, $t \in [0, b]$.
   (b) $\gamma(t) = (8t^3,\ 6t^2 - 3t^4)$, $t \in [0, \sqrt{2}]$.
   (c) $\gamma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t,\ \cos 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
   (d) $\gamma(t) = (2t, t, \ln t)$ entre los puntos $(2, 1, 0)$ y $(4, 2, \ln 2)$.
   (e) $\gamma(t) = (t - \operatorname{sen} t,\ 1 - \cos t, 4 \cos t/2)$ para $t \in [t_0, t_1]$, donde $\gamma(t_0)$ y $\gamma(t_1)$ son los únicos puntos de $\gamma([t_0, t_1])$ que están en el plano xz.

5. Dé una parametrización por longitud de arco para cada una de las siguientes curvas.

   (a) $\gamma(t) = (R \cos t, R\ \operatorname{sen} t, at)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (b) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (c) $\gamma(t) = (2t, t^2, t^3/3)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (d) $\gamma(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

6. Calcule la longitud de arco de las siguientes curvas dadas en las coordenadas correspondientes. Haga un dibujo de cada curva.

(a) La **espiral logarítmica** dada en coordenadas polares por $r(t) = e^t$, $\phi(t) = t$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) La curva contenida en la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ dada en coordenadas esféricas por $r(t) = 1$, $\phi(t) = \pi/2$ y $\theta(t) = t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.

(c) Un paso de la hélice dada en coordenadas cilíndricas por $r(t) = 1$, $\phi(t) = t$ y $z(t) = t$, $t \in [0, 2\pi]$.

7. Halle una fórmula para la curvatura de una curva plana dada por una ecuación en coordenadas polares.

8. Calcule los vectores $\gamma'(s)$ y $\gamma''(s)$ en el ejercicio 4 y verifique que son ortogonales. Calcule la curvatura y la torsión de cada curva. Dé el triedro de Serret-Frenet para cada curva.

9. Demuestre el corolario 1.44 y utilícelo para calcular el triedro de Serret-Frenet en cada una de las curvas del ejercicio 1, así como la curvatura y la torsión de cada una.

10. Demuestre que una curva espacial diferenciable con torsión $\tau \equiv 0$ está contenida en un plano. Utilice este hecho para demostrar que la curva $\gamma(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1+t^2}{t}\right)$ es plana.

11. Dé las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificador para las curvas del ejercicio 1 en los puntos indicados.

    (a) $t = \pi/2$.

    (b) $t = 1$.

    (c) $(x, y, z) = (0, 1, 0)$.

    (d) $t = e$.

    (e) $(1, 0, 1)$.

12. Demuestre que si todos los planos osculadores de una curva espacial tienen un punto de intersección común, entonces tal curva es plana.

13. Sea $k(s)$ una función positiva, definida en un intervalo J. Determine la parametrización general de las curvas planas $\alpha(s)$ cuya curvatura

está dada por $k(s)$. Describa la curva plana tal que su curvatura está dada por

$$k(s) = \sqrt{\frac{1}{2s}}, \quad \tau(s) = 0.$$

14. Se dice que las funciones de curvatura $k(s)$ y torsión $\tau(s)$ de una curva espacial son las **funciones intrínsecas** de la curva. Note que ya hemos calculado tales funciones intrínsecas para las curvas del ejercicio 4.

    (a) Demuestre que si $k(s) \neq 0$ y $k(s) = \lambda\tau(s)$ para alguna constante λ, entonces la curva es una hélice.

    (b) Dé la ecuación de la hélice del inciso (a) si $\lambda = 1$.

    (c) Demuestre que si $\gamma(t)$ es tal que $\|\gamma(t)\| = R$, entonces, si $\tau(s) \neq 0$ se tiene que

$$\frac{1}{k(s)^2} + \left(\frac{k'(s)}{k(s)^2\tau(s)}\right)^2 = R^2.$$

El concepto de curva puede extenderse con facilidad a espacios distintos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. En los siguientes ejercicios estudiaremos algunas curvas en espacios de matrices.

15. $M(n,\mathbb{R})$ denota el espacio de las matrices cuadradas de $n \times n$ con entradas reales, que puede identificarse con el espacio euclidiano de dimensión n^2. Definimos entonces los conjuntos

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{\, A \in M(n,\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \,\},$$

llamado el **grupo lineal real** de dimensión n;

$$O(n) = \{\, A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid AA^T = I \,\},$$

llamado el **grupo ortogonal real** de dimensión n; y por último,

$$SO(n) = \{\, A \in O(n) \mid \det A = 1 \,\},$$

llamado el **grupo ortogonal especial** de dimensión n.

Consideremos la curva matricial $\gamma : \mathbb{R} \to GL(2,\mathbb{R})$ dada por

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}.$$

(a) Demuestre que la imagen bajo γ del intervalo $[0, 2\pi]$ es $SO(2)$, es decir, $\gamma[0, 2\pi] = SO(2)$.

(b) Calcule $\dot{\gamma}$ en $t = 0$, $\pi/2$, π y $3\pi/2$.

(c) Un subconjunto Ω de $\mathbb{R}^n$ es **conexo por trayectorias** si dados dos puntos $A, B \in \Omega$ existe una curva continua γ que los une y está contenida en Ω. Concluya del inciso (a) que $SO(2)$ es conexo por trayectorias.

16. Una matriz $B = (b^i_j) \in M(n, \mathbb{R})$ es **antisimétrica** si

$$B^T = -B \quad \text{o} \quad b^j_i = -b^i_j$$

Sea $\gamma : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$ una curva diferenciable tal que $\gamma(t) = A(t)$ es una matriz ortogonal para todo $t \in \mathbb{R}$. Demuestre que si $\gamma(0) = I$ entonces la matriz tangente $\dot{\gamma}$ a $\gamma(0) = I$ pertenece al conjunto de matrices antisimétricas. Esto es, $\dot{\gamma}(0)$ es una matriz antisimétrica.

CAPÍTULO 2

Superficies en $\mathbb{R}^3$

2.1 Superficies diferenciables

En esta sección desarrollaremos la idea de una superficie contenida en $\mathbb{R}^3$. Mostraremos que una superficie es un objeto con una geometría propia que no depende de la posición en que esté en el espacio donde habite, ni del lugar donde se encuentre situada.

La idea de la definición de una superficie tiene sus orígenes en la construcción de mapas que describen un lugar específico de la Tierra. El problema de describir una región del planeta obedeció al creciente comercio entre las naciones y a la consecuente necesidad de tener una descripción de las rutas de los viajes que se efectuaban para no tener que hacerlos más largos y costosos. La realización de un mapa se efectuaba de acuerdo a varias reglas necesarias para que fuese útil a cualquier persona que pudiera obtener una copia de él.

Podemos expresar algunas de estas reglas de manera matemática, como sigue: Si U denota la región que se quiere describir con un mapa representado por $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, cada punto de la región $p \in U$ tiene asociado un punto y sólo uno en el mapa Ω, denotado por $q \in \Omega$. Además, esta asociación es tal que puntos cercanos del mapa corresponden a puntos cercanos de la región, y recíprocamente; es decir, la asociación y su inversa son continuas. Por último y como consecuencia de lo anterior, si la región U tiene otra asociación con otro mapa $\widetilde{\Omega}$, entonces existe una correspondencia biyectiva entre los puntos de $\widetilde{\Omega}$ y los de Ω de tal forma que puntos cercanos de $\widetilde{\Omega}$ corresponden a puntos cercanos de Ω y recíprocamente.

La figura 2.1 describe esta relación para la construcción de un mapa, y esto da pauta para definir lo que es una superficie en $\mathbb{R}^3$.

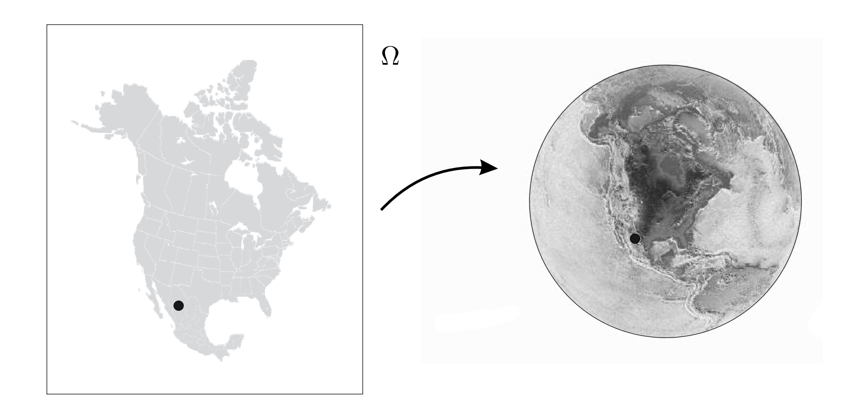


Figura 2.1: Construcción de un mapa para una región de la Tierra.

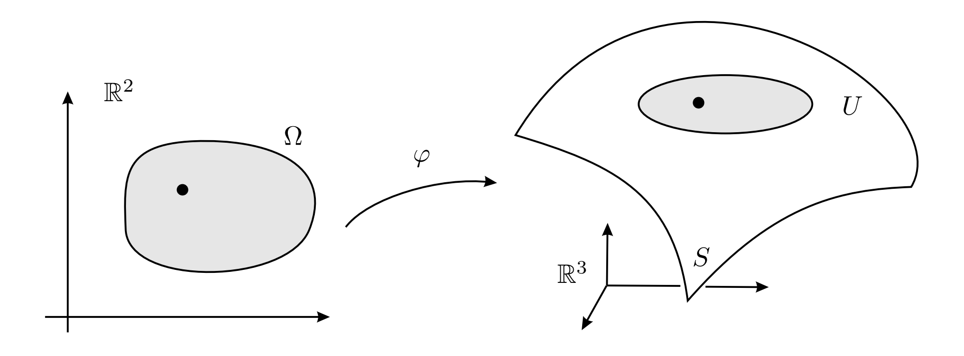


Figura 2.2: Superficie topológica en $\mathbb{R}^3$.

Definición 2.1. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie topológica** si y sólo si para cualquier punto $p \in S$ existe una vecindad (relativa) de p en S y un homeomorfismo $\varphi : \Omega \to U$ de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en U. La pareja (U, φ) se llamará una **parametrización** para la superficie S alrededor del punto p.

La figura 2.2 describe la definición de superficie. De manera breve, se dice que una superficie topológica es **localmente homeomorfa** al plano.

Por supuesto, un conjunto es una superficie topológica si y sólo si para cada punto se puede dar el homeomorfismo $\psi : U \to \Omega$ inverso a cada parametrización. La pareja (U, ψ) es una **carta** para S alrededor de p. Un conjunto de cartas $\{(U_i, \psi_i)\}_{i\in I}$ es un **atlas** para la superficie cuando las cartas cubren a S; es decir, cuando $S = \bigcup_i U_i$.

Asociando las coordenadas (u, v) en Ω y las coordenadas ambientales (x, y, z) para S en $\mathbb{R}^3$, la parametrización φ y su inversa ψ se pueden escribir como

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad \text{y} \quad \psi(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z)).$$

Decimos entonces que φ parametriza a S con el **sistema de coordenadas** (u, v) alrededor del punto p.

Ejemplo 2.2. *Sea $\mathbb{S}^2_R$ la esfera de radio R y centro en el origen de coordenadas,*

$$\mathbb{S}^2_R = \{ (x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \}.$$

Para mostrar que $\mathbb{S}^2_R$ es una superficie topológica utilizaremos las **proyecciones estereográficas** *desde los polos norte $P_N = (0, 0, R)$ y sur $P_S = (0, 0, -R)$ hacia el plano horizontal, mencionadas a continuación. (Véase la figura 2.3.)*

Para proyectar la esfera desde el polo norte P_N hacia el plano horizontal, a cada punto con coordenadas ambientales (x, y, z) en la esfera le asociamos un punto en el plano horizontal con coordenadas (u, v), considerando la línea recta que pasa por el polo norte P_N y por el punto $p = (x, y, z)$. El punto asociado (u, v) del plano es aquel obtenido de la intersección de la recta mencionada y el plano, como se muestra en la figura 2.3.

De tal figura se obtiene que si (x, y) son las dos primeras coordenadas de p, entonces (u, v) es un múltiplo escalar de (x, y); es decir $(u, v) = \lambda(x, y)$ para algún escalar λ.

De la semejanza de triángulos que se muestra en la misma figura 2.3 se obtiene la igualdad

$$\frac{z}{R} = \frac{\lambda\|(x, y)\| - \|(x, y)\|}{\lambda\|(x, y)\|},$$

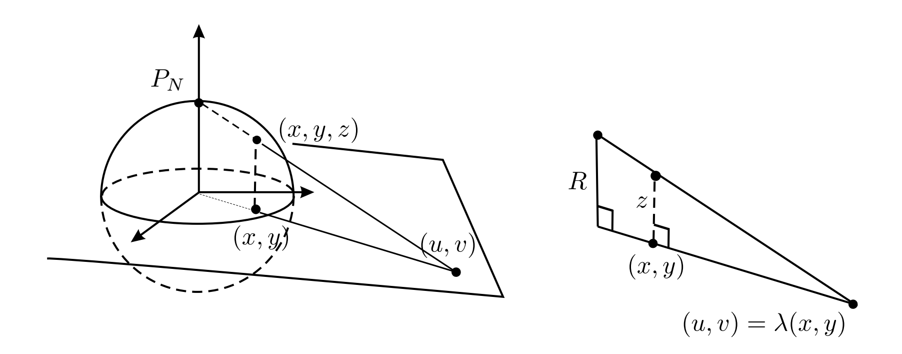


Figura 2.3: Proyección estereográfica de la esfera desde el polo norte.

lo que implica que

$$\lambda = \frac{R}{R - z}.$$

De esta forma se obtienen las expresiones para u, v *en términos de* x, y, z*:*

$$u = \lambda x = \frac{Rx}{R - z}, \qquad v = \lambda y = \frac{Ry}{R - z}.$$

De estas relaciones y de la igualdad $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ *se obtiene que las expresiones inversas son*

$$x = \frac{2R^2 u}{u^2 + v^2 + R^2}, \quad y = \frac{2R^2 v}{u^2 + v^2 + R^2}, \quad z = \frac{R(u^2 + v^2 - R^2)}{u^2 + v^2 + R^2}.$$

Sea V_1 *el conjunto abierto consistente en los puntos de* $\mathbb{R}^3$ *que no están contenidos en el semieje positivo* z*. El conjunto* $U_1 = V_1 \cap \mathbb{S}^2_R = \mathbb{S}^2_R \setminus \{P_N\}$ *es una vecindad de* p *para cualquier punto* $p \in \mathbb{S}^2_R \setminus \{P_N\}$*. Si definimos la transformación continua* $\psi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2$ *mediante*

$$(u, v) = \psi_1(x, y, z) = \left(\frac{Rx}{R - z}, \frac{Ry}{R - z} \right),$$

se tiene una carta (U_1, ψ_1) *para la esfera* $\mathbb{S}^2_R$*. La inversa de* ψ_1 *es una parametrización continua* $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to U_1$*,* $\varphi_1(u, v) = (x, y, z)$ *dada mediante*

$$\varphi_1(u, v) = \left(\frac{2R^2 u}{u^2 + v^2 + R^2}, \frac{2R^2 v}{u^2 + v^2 + R^2}, \frac{R(u^2 + v^2 - R^2)}{u^2 + v^2 + R^2} \right).$$

De manera análoga, para proyectar la esfera desde el polo sur hacia el plano horizontal, a cada punto con coordenadas (x, y, z) en la esfera le asociamos un punto con coordenadas $(\tilde{u}, \tilde{v})$, considerando la línea recta que pasa por el polo sur P_S y por el punto $p = (x, y, z)$. El punto asociado $(\tilde{u}, \tilde{v})$ del plano es aquel obtenido de la intersección de la recta y el plano.

En este caso se tienen las relaciones

$$\tilde{u} = \tilde{u}(x, y, z) = \lambda x = \frac{Rx}{R+z}, \quad \tilde{v} = \tilde{v}(x, y, z) = \lambda y = \frac{Ry}{R+z},$$

con las relaciones inversas

$$\begin{aligned} x &= \frac{2R^2\tilde{u}}{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + R^2}, \\ y &= \frac{2R^2\tilde{v}}{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + R^2}, \\ z &= -\frac{R(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 - R^2)}{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + R^2}. \end{aligned}$$

Si V_2 es el conjunto abierto consistente en los puntos de $\mathbb{R}^3$ que no están contenidos en el semieje negativo z, el conjunto $U_2 = V_2 \cap \mathbb{S}^2_R$ es una vecindad de p para cualquier punto $p \in \mathbb{S}^2_R \setminus \{P_S\}$. La transformación continua $\psi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la regla

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = \psi_2(x, y, z) = \left(\frac{Rx}{R+z}, \frac{Ry}{R+z} \right),$$

proporciona otra carta (U_2, ψ_2) para la esfera $\mathbb{S}^2_R$. La inversa de ψ_2 es una parametrización continua $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to U_2$ definida mediante la regla de correspondencia $(x, y, z) = \varphi_2(u, v)$, con

$$\varphi_2(u, v) = \left(\frac{2R^2\tilde{u}}{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + R^2}, \frac{2R^2\tilde{v}}{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + R^2}, \frac{R(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 - R^2)}{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + R^2} \right).$$

De esta forma, un atlas para la esfera $\mathbb{S}^2_R$ viene dado por

$$\{(U_1, \psi_1), (U_2, \psi_2)\},$$

pues $\mathbb{S}^2_R = U_1 \cup U_2$. Esto muestra que la esfera $\mathbb{S}^2_R$ es una superficie topológica. Obsérvese además que $U_1 \cap U_2 = \mathbb{S}^2_R \setminus \{P_N, P_S\}$ es un conjunto conexo. $\triangleright$

Ejemplo 2.3. *La parte superior del cono circular recto C definido por la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, con $z \geq 0$, es una superficie topológica en $\mathbb{R}^3$.*

Consideremos las coordenadas (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ y (u, v) en el plano. La transformación continua $\varphi : \mathbb{R}^2 \to U \subset C$ definida mediante la regla de correspondencia

$$(x, y, z) = \varphi(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$$

es una parametrización de todo el cono C, lo cual lo hace una superficie topológica en $\mathbb{R}^3$. (Véase la figura 2.4.) ▷

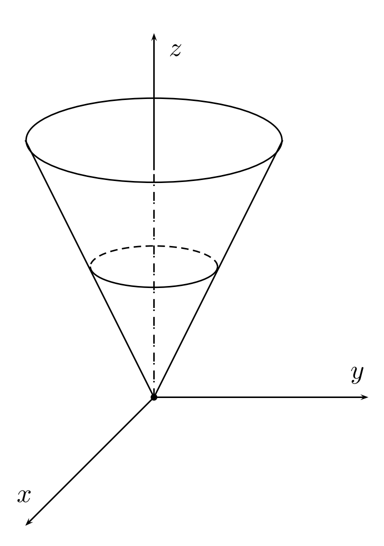


Figura 2.4: Cono circular recto como una superficie topológica.

En la definición de superficie topológica hemos establecido que cada punto en ella debe contar con una vecindad homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^2$. Para poder utilizar los elementos del cálculo, restringiremos nuestra atención a aquellas superficies cuyas cartas y parametrizaciones sean diferenciables. El lector debe notar esto en la siguiente definición.

Definición 2.4. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie diferenciable** si y sólo si para cada punto $p \in S$ existe una vecindad U de p en S y un difeomorfismo $\varphi : \Omega \to U$ de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en U.

De manera análoga a la definición 2.1, la pareja (U, φ) es una **parametrización** alrededor de p y si $\psi = \phi^{-1}$, entonces (U, ψ) es una **carta** para la superficie S alrededor del punto p, y un conjunto de cartas $\{(U_i, \psi_i)\}$ es un **atlas** para la superficie cuando $S = \cup_i U_i$.

Ejemplo 2.5. *En el ejemplo 2.2 vimos que la esfera $\mathbb{S}^2_R$ es una superficie topológica. Las transformaciones que utilizamos en ese ejemplo son también diferenciables, por lo que la esfera es una superficie diferenciable.* ▷

Más adelante veremos que el cono del ejemplo 2.3 no es una superficie diferenciable, pero antes veamos algunas consecuencias de la definición 2.4. Sean p un punto de una superficie diferenciable y (U, φ) una parametrización en p. Entonces φ tiene una inversa ψ diferenciable, de modo que existe una transformación diferenciable Ψ definida en una vecindad ordinaria de p en $\mathbb{R}^3$ tal que $\Psi \circ \varphi = \mathrm{Id}$. Por la regla de la cadena, tenemos que

$$d\Psi_p \circ d\varphi_q = \mathrm{Id}.$$

donde $q = \varphi^{-1}(p)$. Esto dice que la transformación $d\varphi_q$ es inyectiva. Para traducir este hecho a una forma matricial, sean (u, v) las coordenadas en $\mathbb{R}^2$ y (x, y, z) las coordenadas en $\mathbb{R}^3$, de modo que

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

La matriz asociada a $d\varphi_q$ tiene entonces la forma

$$D\varphi_q = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix},$$

donde, por ejemplo, x_u denota la parcial de x con respecto de u.

Sabemos también que los vectores columna de esta matriz son las imágenes de los vectores $\{e_1, e_2\}$ de la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Denotamos estos vectores como φ_u, φ_v:

$$d\varphi_q(e_1) = (x_u, y_u, z_u) = \varphi_u, \quad d\varphi_q(e_2) = (x_v, y_v, z_v) = \varphi_v.$$

El álgebra lineal nos proporciona el siguiente resultado.

Lema 2.6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

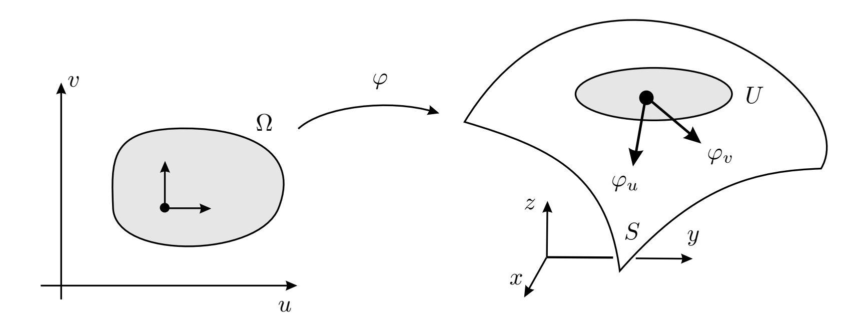


Figura 2.5: Una superficie diferenciable y una parametrización.

1. *La transformación lineal* $d\varphi_q$ *es inyectiva.*
2. *La matriz jacobiana* $D\varphi_q$ *tiene rango 2.*
3. *Alguno de los menores*

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix},$$

denotados respectivamente por

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(z,x)}{D(u,v)},$$

es distinto de cero en q.

4. *La expresión*

$$\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2$$

es distinta de cero en q.

5. *El producto cruz*

$$\varphi_u \times \varphi_v = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, -\frac{D(x,z)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)$$

es distinto de cero en q.

6. *Los vectores* φ_u *y* φ_v *son linealmente independientes, es decir, no colineales.*

Este resultado nos proporciona varios criterios para analizar otros ejemplos de superficies diferenciables.

Ejemplo 2.7. *Sea P un plano en el espacio determinado por la ecuación*

$$ax + by + cz = d$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $c \neq 0$. De esta ecuación se tiene que

$$z = \frac{d}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y.$$

De esta forma, al tomar $x = u$ y $y = v$, una parametrización del plano está dada por

$$\varphi(u, v) = \left(u, v, \frac{d}{c} - \frac{a}{c}\,u - \frac{b}{c}v\right), \qquad (u, v) \in \Omega = \mathbb{R}^2.$$

Es claro que

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

lo que implica que $D\varphi_{(u,v)}$ tiene rango 2 en cada punto (u, v) de Ω y P es una superficie diferenciable. ▷

Ejemplo 2.8. *Considérese de nuevo la esfera $\mathbb{S}^2_R$ en $\mathbb{R}^3$.*

Definamos una parametrización local de $\mathbb{S}^2_R$ en coordenadas co–geográficas (ϕ, θ) mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= R\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \\ y &= R\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \\ z &= R\cos\theta, \end{aligned} \tag{2.1}$$

con $0 < \phi < 2\pi, 0 < \theta < \pi$.

La imagen de φ está contenida en $\mathbb{S}^2_R$, pues

$$\|\varphi(\phi, \theta)\| = \|(R\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, R\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, R\cos\theta)\| = R.$$

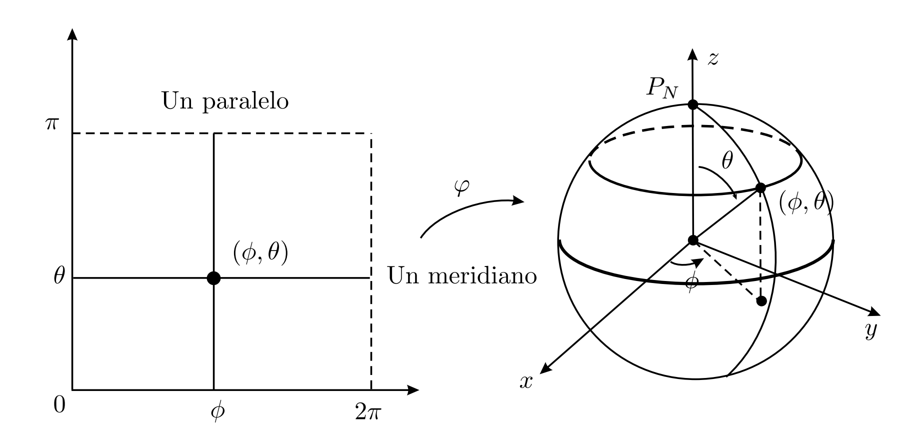


Figura 2.6: Coordenadas co-geográficas de la esfera.

A la imagen de la línea horizontal $\theta =$ constante *bajo* φ *le llamaremos un* **paralelo** *de* $\mathbb{S}^2_R$*, mientras que a la imagen bajo* φ *de la línea vertical* $\phi =$ constante *le llamaremos un* **meridiano**. *(Véase la figura 2.6.)*

Al calcular los jacobianos, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{D(x,y)}{D(\phi,\theta)} &= \begin{vmatrix} -R\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & R\cos\phi\cos\theta \\ R\cos\phi\operatorname{sen}\theta & R\operatorname{sen}\phi\cos\theta \end{vmatrix} = -R^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \\
\frac{D(y,z)}{D(\phi,\theta)} &= \begin{vmatrix} R\cos\phi\operatorname{sen}\theta & -R\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ 0 & -R\operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} = -R^2\cos\phi\operatorname{sen}^2\theta, \\
\frac{D(z,x)}{D(\phi,\theta)} &= \begin{vmatrix} 0 & -R\operatorname{sen}\theta \\ -R\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & R\cos\phi\cos\theta \end{vmatrix} = -R^2\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}^2\theta,
\end{aligned}$$

de donde

$$\left(\frac{D(y,z)}{D(\phi,\theta)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(\phi,\theta)}\right)^2 + \left(\frac{D(x,y)}{D(\phi,\theta)}\right)^2 = R^4\operatorname{sen}^2\theta.$$

Esta expresión se anula si $\theta = 0$ *o* $\theta = \pi$*, lo que correspondería a los polos norte* P_N *y sur* P_S*. Pero estos puntos no quedan cubiertos por la parametrización.*

Por otro lado, de las ecuaciones (2.1) se puede obtener la relación

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{R}\right).$$

Además, al dividir cada miembro de la ecuación $y = R \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$ *entre la ecuación* $x = R\cos\phi \operatorname{sen}\theta$, *se tiene que*

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Sea Γ *la unión de la circunferencia en* $\mathbb{S}^2_R$ *determinada por* $x = 0$ *y por la semicircunferencia en* $\mathbb{S}^2_R$ *definida mediante las relaciones* $y = 0, x \geq 0$. *Entonces las relaciones obtenidas para* ϕ *y* θ *describen una función inversa entre* $\mathbb{S}^2_R \setminus \Gamma$ *y un subconjunto de* Ω.

De esta forma, φ *es una parametrización local de los puntos de la esfera contenidos en* $\mathbb{S}^2_R \setminus \Gamma$. *Esta parametrización provee a la esfera* $\mathbb{S}^2_R$ *de un sistema de coordenadas locales* (ϕ, θ). ▷

Observación. Al parametrizar una porción de una superficie mediante las coordenadas $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, podemos estudiar cualquier objeto definido en la parte parametrizada de la superficie mediante las coordenadas (u, v). Así, por ejemplo, si alguna función está definida sobre la esfera $\mathbb{S}^2_R$ y las coordenadas en $\mathbb{S}^2_R$ son las del mapa (ϕ, θ), entonces podemos estudiar la función expresada en estas coordenadas y no en las del espacio ambiente x, y, z. De hecho, en varios textos de geometría se acostumbra un abuso de notación (que por lo general no lleva a mayores confusiones), identificando las coordenadas (u, v) con el punto $\varphi(u, v)$ en la superficie.

Ejemplo 2.9. *Considérese el* **hiperboloide de dos hojas** *en* $\mathbb{R}^3$, *definido por la ecuación*

$$R^2 = z^2 - x^2 - y^2, \quad R > 0.$$

Si consideramos la hoja superior $z > 0$ *denotada por* L^2, *entonces una parametrización local* $(x, y, z) = \varphi(\phi, \theta)$ *viene dada mediante* **coordenadas pseudoesféricas** *utilizando las relaciones*

$$\begin{aligned} x &= R \operatorname{senh}\theta \cos\phi, \\ y &= R \operatorname{senh}\theta \operatorname{sen}\phi, \\ z &= R \cosh\theta, \end{aligned}$$

donde $(\phi,\theta)\in\Omega=(0,2\pi)\times\mathbb{R}$.

De manera análoga al caso de la esfera, a la imagen de la línea horizontal $\theta=\text{constante}$ *bajo* φ *le llamaremos un* **paralelo** *del hiperboloide, mientras que a la imagen bajo* φ *de la línea vertical* $\phi=\text{constante}$ *le llamaremos un* **meridiano**. *(Véase la figura 2.7.)*

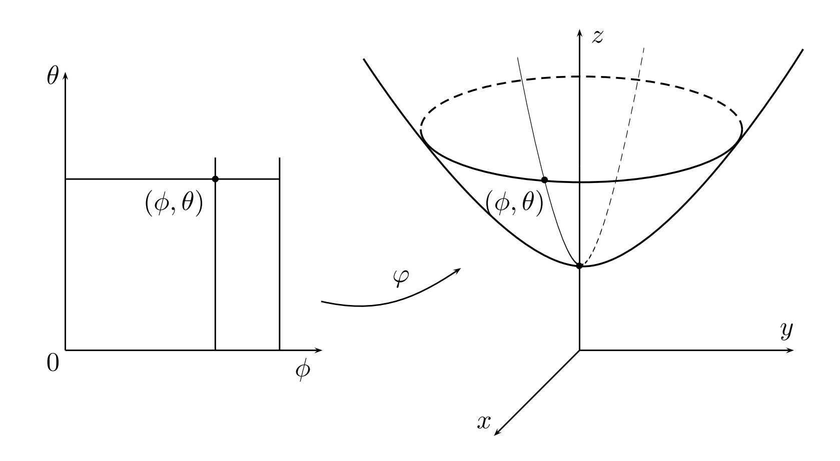


Figura 2.7: Hoja superior del hiperboloide.

Con un cálculo directo obtenemos

$$\frac{D(x,y)}{D(\phi,\theta)} = \begin{vmatrix} -R\operatorname{senh}\theta\operatorname{sen}\phi & R\cosh\theta\cos\phi \\ R\operatorname{senh}\theta\cos\phi & R\cosh\theta\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix} = -R^2\operatorname{senh}\theta\cosh\theta,$$

$$\frac{D(y,z)}{D(\phi,\theta)} = \begin{vmatrix} R\operatorname{senh}\theta\cos\phi & R\cosh\theta\operatorname{sen}\phi \\ 0 & R\operatorname{senh}\theta \end{vmatrix} = R^2\operatorname{senh}^2\theta\cos\phi,$$

y

$$\frac{D(z,x)}{D(\phi,\theta)} = \begin{vmatrix} 0 & R\operatorname{senh}\theta \\ -R\operatorname{senh}\theta\operatorname{sen}\phi & R\cosh\theta\cos\phi \end{vmatrix} = R^2\operatorname{senh}^2\theta\operatorname{sen}\phi,$$

de donde

$$\left(\frac{D(x,y)}{D(\phi,\theta)}\right)^2 + \left(\frac{D(y,x)}{D(\phi,\theta)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(\phi,\theta)}\right)^2 = R^4(1+2\operatorname{senh}^2\theta)\operatorname{senh}^2\theta,$$

el cual es diferente de cero si $\theta\neq 0$.

Si omitimos la hipérbola $\Gamma \subset L^2$ *definida por*

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in L^2 \mid x = 0\},$$

se tiene una carta definida en $U = L^2 \setminus \Gamma$ *mediante las relaciones*

$$\begin{aligned} \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \\ \theta &= \operatorname{arccosh}\left(\frac{z}{R}\right), \end{aligned}$$

Esto hace de φ *una parametrización de la región* $(L^2 \setminus \Gamma) \subset L^2$ *y provee a esta región de un sistema de coordenadas* (ϕ, θ). ▷

2.2 Caracterizaciones de las superficies

En esta sección revisaremos algunos métodos para obtener una gran variedad de ejemplos de superficies. Primero mostraremos que la gráfica de cualquier función diferenciable definida en una región del plano es una superficie diferenciable $S \subset \mathbb{R}^3$.

Lema 2.10. *Sean* Ω *una región de* $\mathbb{R}^2$ *y* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable. Entonces la gráfica de* f *es una superficie diferenciable.*

Demostración. Si S es la gráfica de f en $\mathbb{R}^3$, basta definir la parametrización

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

como $x = u$, $y = v$, $z = f(x, y) = f(u, v)$ para $(u, v) \in \Omega$. Es claro que la proyección $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ restringida a S define una carta global para S. □

A continuación mostraremos una forma de definir localmente a una superficie diferenciable, como la imagen inversa de un valor regular de una función F definida en un conjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^3$ con valores reales.

Definición 2.11. Sean $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $p \in \Omega$. Decimos que p es un **punto regular** de F si DF_p no se anula. Decimos que $a \in \mathbb{R}$ es un **valor regular** de F si cualquier punto $p \in F^{-1}(a)$ es un punto regular.

Notamos que si a es un valor que no está en la imagen de F, entonces a es un valor regular.

En las coordenadas (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, DF_p no se anula si y sólo si alguna de las derivadas parciales

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p), \quad \frac{\partial F}{\partial z}(p), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(p),$$

es distinta de cero; esto es, si y sólo si el vector gradiente

$$\nabla F_p = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)_p$$

es distinto de $(0, 0, 0)$.

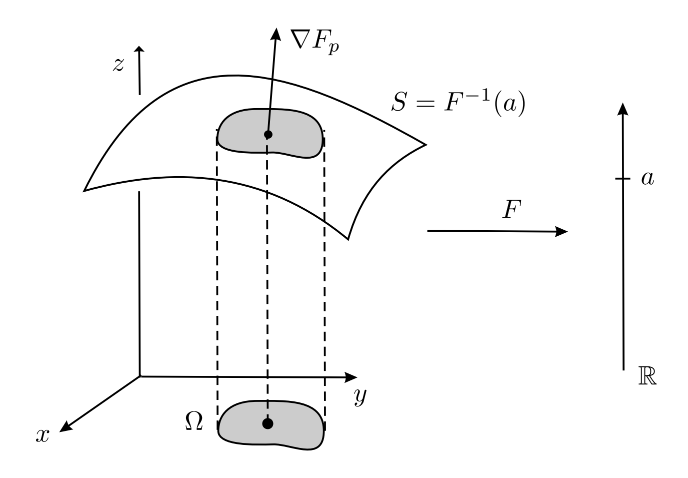


Figura 2.8: Superficie de nivel de una función diferenciable.

Lema 2.12. *Sean $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $a \in F(\Omega)$ un valor regular de F. Entonces el conjunto de nivel de F en a, definido por*

$$S = F^{-1}(a) = \{ \ (x, y, z) \in \Omega \mid F(x, y, z) = a \ \},$$

es una superficie diferenciable y es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^3$.

Demostración. Sea p_0 un punto regular en $F^{-1}(a)$. Entonces el gradiente de F no se anula en p_0.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\frac{\partial F}{\partial z}(p_0) \neq 0$. Por el teorema de la función implícita (teorema 0.28), existe una vecindad Ω' de (x_0, y_0) en $\mathbb{R}^2$ y una función $f(x,y)$ definida en Ω' tales que un punto (x,y,z) está en $\Omega \cap F^{-1}(a)$ si y sólo si $z = f(x,y)$. Es decir, $F^{-1}(a)$ se puede describir localmente como la gráfica de la función $z = f(x,y)$. Por el lema anterior se tiene que $F^{-1}(a)$ es una superficie diferenciable. S es un conjunto cerrado, pues es la imagen del conjunto cerrado $\{a\}$ bajo la función continua F. (Véase la figura 2.8.) □

Ejemplo 2.13. *Sea E el* **elipsoide** *en $\mathbb{R}^3$ definido mediante*

$$E = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

Veremos que E es una superficie diferenciable, mostrando que es la imagen inversa de un valor regular.

Se tiene que $E = F^{-1}(0)$ para la función

$$F(x,y,z) = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right).$$

El gradiente

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \left(-\frac{2x}{a^2}, -\frac{2y}{b^2}, -\frac{2z}{c^2} \right)$$

se anula si y sólo si $x = y = z = 0$. Pero el punto $(0,0,0)$ no pertenece a E, de donde todos los puntos de E son regulares. Por el lema 2.12, E es una superficie diferenciable en $\mathbb{R}^3$. ▷

Ejemplo 2.14. *El* **hiperboloide de dos hojas** *en $\mathbb{R}^3$ es el conjunto*

$$H = \{(x,y,z) \mid 1 = -x^2 - y^2 + z^2\}.$$

Si definimos la función diferenciable $F(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2$, entonces el hiperboloide está dado por $H = F^{-1}(1)$. El gradiente de F está dado por $\nabla F = (-2x, -2y, 2z)$ y se anula sólo si $(x,y,z) = (0,0,0)$. Como tal punto no está en H, el lema 2.12 implica que H es una superficie diferenciable. (Véase la figura 2.9.) Notemos que H es un conjunto disconexo. ▷

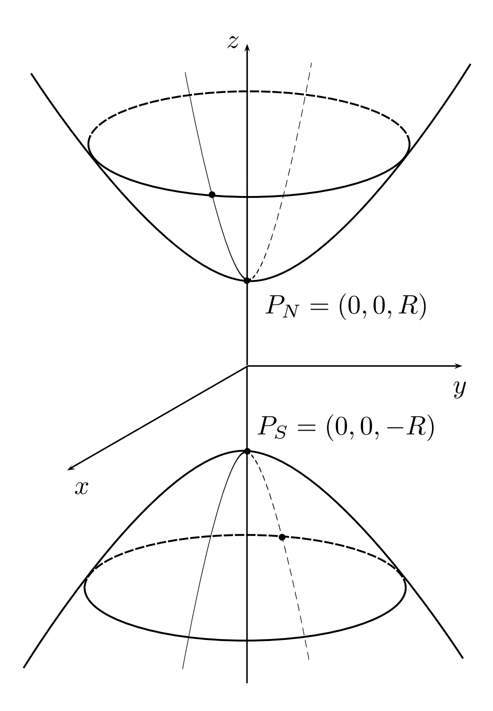


Figura 2.9: Hiperboloide de dos hojas.

A continuación se demuestra una versión local de la afirmación recíproca del lema 2.10.

Lema 2.15. *Toda superficie diferenciable es localmente la gráfica de una función diferenciable de dos variables.*

Demostración. Sean p un punto en S y $\varphi : \Omega \to U$ una parametrización de una vecindad de p. Utilizando las coordenadas (u, v) en Ω y (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$, sabemos que uno de los menores que aparecen en el tercer inciso del lema 2.6 es distinto de cero. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}(q) \neq 0,$$

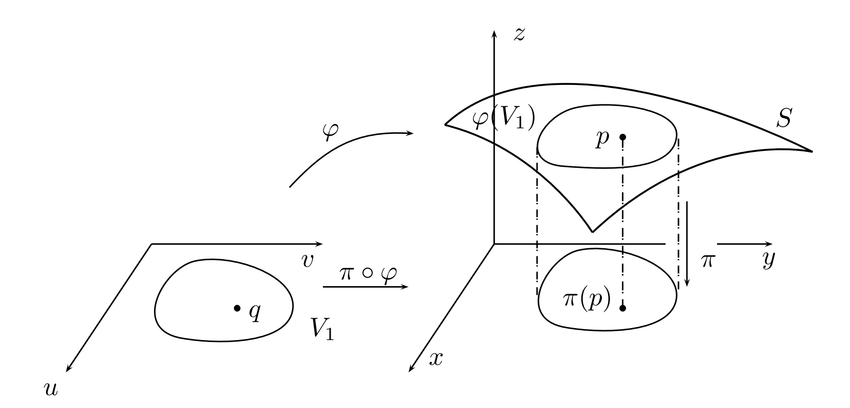


Figura 2.10: Superficie diferenciable vista localmente como una gráfica en $\mathbb{R}^3$.

donde $\varphi(q) = p$. Consideremos la proyección π de $\mathbb{R}^3$ en el plano xy dada por $\pi(x, y, z) = (x, y)$ y analicemos la composición $\pi \circ \varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$(\pi \circ \varphi)(u, v) = \pi(x(u, v),\, y(u, v),\, z(u, v)) = (x(u, v),\, y(u, v)).$$

Entonces

$$D(\pi \circ \varphi)_q = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \det D(\pi \circ \varphi)_q = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0.$$

Por el teorema de la función inversa, existen vecindades $V_1 \subset \mathbb{R}^2$ de q y V_2 en el plano xy de $\pi(p)$ tales que la transformación diferenciable $\pi \circ \varphi : V_1 \to V_2$ tiene una inversa diferenciable, que denotamos por

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Tenemos entonces que

$$z = z(u, v) = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y),$$

lo que implica que S es localmente la gráfica de la función f. (Véase la figura 2.10.) □

El siguiente ejemplo nos muestra la utilidad del lema 2.15 cuando se quiere demostrar que un objeto en $\mathbb{R}^3$ no es una superficie diferenciable.

Ejemplo 2.16. *Veremos que la parte superior del cono circular recto C definido por la ecuación*

$$x^2 + y^2 = z^2$$

no es una superficie diferenciable.

Supongamos que C es diferenciable. Por el lema 2.15, C se puede expresar cerca de $(0,0,0)$ mediante alguna de las siguientes formas,

$$\begin{cases} z = f(x,y), \\ x = h(y,z), \\ y = g(x,z), \end{cases}$$

donde f, g, h son funciones diferenciables. Las dos últimas expresiones pueden descartarse, pues las proyecciones correspondientes no son inyectivas. Por último, si $z = f(x,y)$, entonces f coincidiría con la función $\sqrt{x^2+y^2}$ en una vecindad de $(0,0,0)$. Esto no es posible, pues $\sqrt{x^2+y^2}$ no es diferenciable en el origen. (Véase la figura 2.11.) ▷

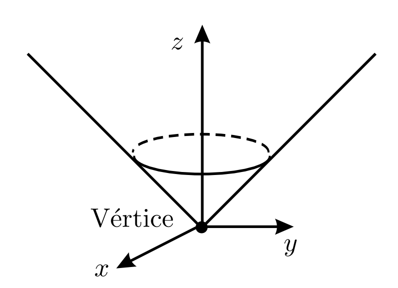


Figura 2.11: Cono circular recto en $\mathbb{R}^3$.

Los lemas 2.10 a 2.15 se resumen en el siguiente resultado.

Teorema 2.17. *Una superficie diferenciable $S \subset \mathbb{R}^3$ se puede definir localmente de alguna de las tres siguientes maneras:*

- **a.** *La imagen inversa de un valor regular de una función real y diferenciable definida en una vecindad de S en $\mathbb{R}^3$.*
- **b.** *La gráfica de una función real diferenciable, definida en una región del plano $\mathbb{R}^2$.*

c. *La imagen de una parametrización* $\varphi : \Omega \to U \subset \mathbb{R}^3$.

Este teorema nos ayuda a definir a una superficie diferenciable, utilizando sólo argumentos locales. Así, en adelante usaremos cualquiera de estas tres caracterizaciones equivalentes para definir o denotar localmente a una superficie diferenciable.

Los siguientes ejemplos muestran que las caracterizaciones locales de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ dadas en el teorema anterior no siempre pueden extenderse de manera global. En particular, el primer ejemplo muestra que no toda superficie se puede ver como la imagen de una sola parametrización. El número mínimo de parametrizaciones necesarias para cubrir a una superficie está determinado por su topología. A esta característica se le conoce como **categoría** de la superficie.

Ejemplo 2.18. *Sea* $\mathbb{S}^2_R \subset \mathbb{R}^3$ *la esfera de radio* R *y centro en el origen.*

Es sabido que $\mathbb{S}^2_R$ *es un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^3$. *Por esto, de existir una carta global* $(\mathbb{S}^2_R, \psi)$, *se tendría que* $\psi(\mathbb{S}^2_R)$ *sería un conjunto compacto en el plano, lo que contradice el hecho de que* $\psi(\mathbb{S}^2_R)$ *debe ser abierto, como exige la definición de superficie.*

Por otro lado, la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

define de manera global a $\mathbb{S}^2_R$ *como la imagen inversa de un valor regular:* $\mathbb{S}^2_R = F^{-1}(R^2)$.

La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ *produce una función del tipo*

$$z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

definida en el conjunto $\Omega_{(x,y)} = \{\, (x, y) \,|\, x^2 + y^2 < R^2 \,\}$, *cuya gráfica en* $\mathbb{R}^3$ *es el hemisferio superior que contiene al polo norte* P_N, *pero sin frontera. Para cubrir a* $\mathbb{S}^2_R$ *con gráficas de clase* C^1 *de este tipo, se necesitan seis funciones como la que se menciona. (Véase el ejercicio 6 de este capítulo.) La figura 2.12 ilustra cada una de estas posibilidades.* ▷

Ejemplo 2.19. *Considérese el cilindro circular recto* $C \subset \mathbb{R}^3$ *definido por la ecuación*

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z \in \mathbb{R}.$$

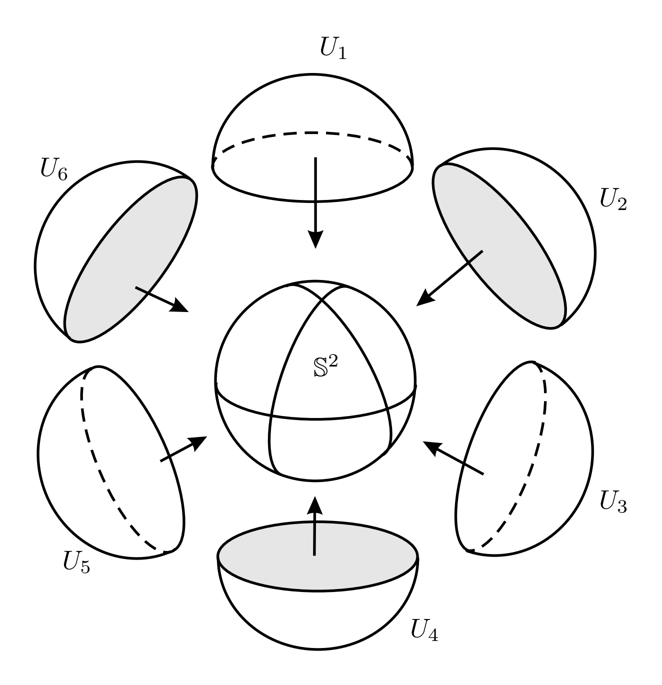


Figura 2.12: Parametrizaciones locales de $\mathbb{S}^2_R$.

La parametrización dada por

$$x = R\cos\phi, \quad y = R\,\mathrm{sen}\,\phi, \quad z = \ln r,$$

donde $(r, \phi) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi)$*, no cubre a* C*, pues omite a la recta definida por las ecuaciones* $x = R$*,* $y = 0$*.*

La función $F(x, y, z) = x^2 + y^2$ *sí define de manera global a* C *debido a que*

$$C = F^{-1}(R),$$

siendo R *un valor regular.*

De la ecuación $x^2 + y^2 = R^2$ *se puede obtener una función del tipo*

$$y = f(x, z) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

que define al semicilindro de C *dado por* $y > 0$*. Sin embargo, el cilindro*

C no puede ser definido de manera global como la gráfica de una función diferenciable de dos variables. ▷

Ejemplo 2.20. *Considérese el hiperboloide de dos hojas L^2 en $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación*

$$z^2 - x^2 - y^2 = R^2.$$

La parametrización dada por las coordenadas pseudoesféricas $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ parametriza sólo un subconjunto de la hoja superior L^2.

La función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$$

define a todo el hiperboloide como el conjunto $F^{-1}(R)$, siendo R un valor regular de F.

Por último, la hoja superior de L^2 se puede definir de manera global como la gráfica de la función

$$z = f(x, y) = \sqrt{R^2 + x^2 + y^2}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. No obstante, L^2 no puede ser definido de manera global como la gráfica de una función de dos variables. ▷

Damos ahora otros ejemplos de superficies diferenciables en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.21 (Superficies de revolución)**.** *Considere una curva Γ contenida en el plano xz, que no corte al eje z, y definida en un intervalo J mediante las ecuaciones $x = f(u)$ y $z = g(u)$, donde $f, g : J \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $f(u) > 0$ para todo $u \in (a, b)$.*

Al hacer rotar tal curva Γ alrededor del eje z en $\mathbb{R}^3$, se obtiene una superficie S cuya parametrización local $\varphi(u, v) = (x, y, z)$ viene dada por

$$\begin{aligned} x &= f(u)\cos v, \\ y &= f(u)\operatorname{sen} v, \\ z &= g(u), \end{aligned}$$

definida para $(u, v) \in J \times (0, 2\pi) = \Omega$. Omitimos la prueba de que φ es una parametrización de la **superficie de revolución** *S, pues sigue el mismo esquema de casos anteriores.*

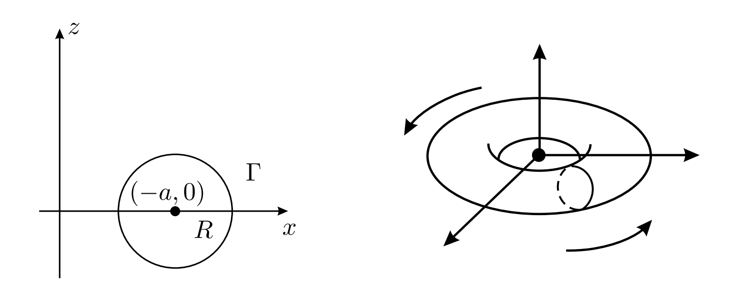


Figura 2.13: El toro de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$.

A la imagen de la línea $u =$ constante *bajo* φ *le llamaremos un* **paralelo** *de* S*, mientras que a la imagen bajo* φ *de la línea* $v =$ constante *le llamaremos un* **meridiano** *de* S*.*

Para ilustrar este tipo de superficies, consideremos la circunferencia de radio R *con centro en* $(a, 0)$ *en el plano* (x, z) *parametrizada por*

$$x = R\cos u + a, \quad z = R\,\mathrm{sen}\,u,$$

donde $u \in (0, 2\pi)$*,* $0 < R < a$*. A la superficie de revolución obtenida se le llama el* **toro de dimensión 2** *y se denota por* T^2*. (Véase la figura 2.13.)*

De esta manera, una parametrización local de T^2 *viene dada por las ecuaciones*

$$\begin{aligned} x &= (R\cos u + a)\cos v, \\ y &= (R\cos u + a)\,\mathrm{sen}\,v, \\ z &= R\,\mathrm{sen}\,u, \end{aligned}$$

donde $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) = \Omega$*. No es difícil verificar que bajo tal parametrización, se omite un meridiano, pero también un paralelo en* T^2*. (Véase la figura 2.13.)* ▷

Finalizamos esta sección con un breve comentario sobre las transformaciones de transición, también llamadas cambios de coordenadas.

Sean (U, φ) y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ dos parametrizaciones alrededor de un punto $p \in S$. Entonces $p \in U \cap \tilde{U}$ y por lo tanto existen puntos (u_0, v_0) y $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ tales que

$$\varphi(u_0, v_0) = p = \tilde{\varphi}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0),$$

lo que implica que

$$\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi(u_0, v_0) = (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \quad \text{y} \quad \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) = (u_0, v_0).$$

Las transformaciones:

$$\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(U \cap \tilde{U}) \to \tilde{\varphi}^{-1}(U \cap \tilde{U}),$$

denotada por

$$\tilde{u} = \tilde{u}(u, v) \quad \text{y} \quad \tilde{v} = \tilde{v}(u, v),$$

y

$$\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi} : \tilde{\varphi}^{-1}(U \cap \tilde{U}) \to \varphi^{-1}(U \cap \tilde{U}),$$

denotada mediante

$$u = u(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad \text{y} \quad v = v(\tilde{u}, \tilde{v}),$$

se llaman las **transformaciones de transición** (o de **cambio de coordenadas**). La figura 2.14 ilustra estas transformaciones.

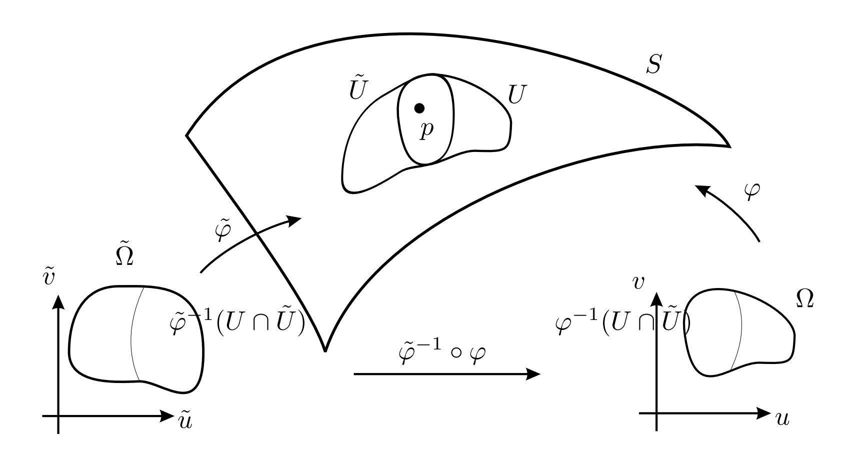


Figura 2.14: Transformaciones de transición en una superficie.

Ejemplo 2.22. *Consideremos de nuevo a la esfera $\mathbb{S}^2_R$. Recordemos que en el ejemplo 2.2 usamos las proyecciones estereográficas desde los polos norte*

$P_N = (0,0,R)$ y sur $P_S = (0,0,-R)$ para obtener dos parametrizaciones $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2_R \setminus \{P_N\}$ y $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2_R \setminus \{P_S\}$. Observemos que

$$W = (\mathbb{S}^2_R \setminus \{P_N\}) \cap (\mathbb{S}^2_R \setminus \{P_S\}) = \mathbb{S}^2_R \setminus \{P_N, P_S\}$$

y que en cada caso $\varphi_1^{-1}(W) = \varphi_2^{-1}(W) = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Para calcular la transformación de transición $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(W) \to \varphi_2^{-1}(W)$ utilizamos las relaciones del ejemplo 2.2, obteniendo

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \tilde{u}(u,v) = \frac{R^2 u}{u^2+v^2}, \\ \tilde{v} &= \tilde{v}(u,v) = \frac{R^2 v}{u^2+v^2}. \end{aligned}$$

Obsérvese que $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ son funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. ▷

Por el momento sólo estudiaremos el caso de las superficies vistas como subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, en la segunda parte de esta obra estudiaremos el caso de las superficies vistas como entes abstractos, sin hacer referencia a un espacio ambiente. En este contexto más general, los cambios de coordenadas jugarán un papel central, pues estarán definidos como transformaciones entre conjuntos abiertos de espacios euclidianos. Como ilustración de su uso estudiaremos las funciones definidas en regiones de una superficie en $\mathbb{R}^3$ con valores vectoriales en un espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Sean $f : S \to \mathbb{R}^n$ una transformación definida en la superficie S, p un punto arbitrario de S y $\varphi : \Omega \to U$ una parametrización de una vecindad de p. Podemos definir una transformación $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de tal forma que

$$h(u,v) = (f \circ \varphi)(u,v) = f(q),$$

con $q = \varphi(u,v) \in U$. Decimos que h es una **representación de** f en las coordenadas (u,v). (Véase la figura 2.15.)

Si $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ es otra parametrización alrededor de p, de modo que f cuente ahora con una representación $\tilde{h}(\tilde{u},\tilde{v})$, tenemos que

$$\tilde{h} = f \circ \tilde{\varphi}.$$

En términos del cambio de coordenadas,

$$\tilde{h} = f \circ \tilde{\varphi} = f \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) \circ \tilde{\varphi} = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}) = h \circ (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})$$

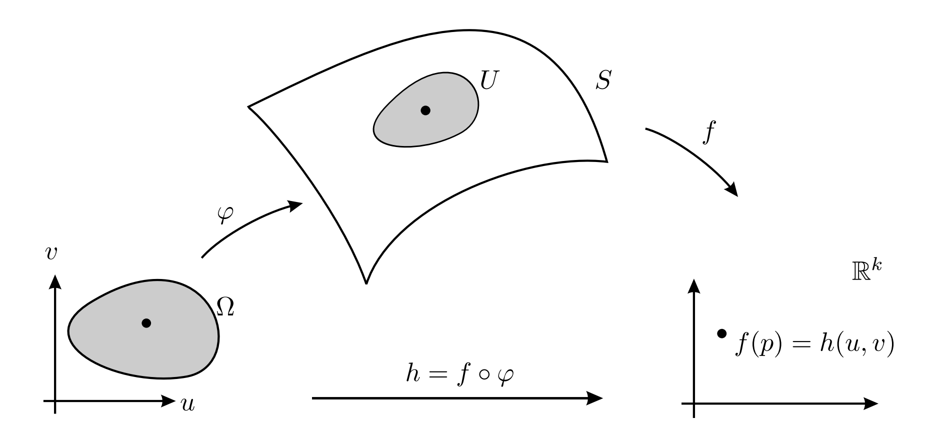


Figura 2.15: Representación de f.

Como $\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$ es diferenciable, podemos deducir que la representación $\tilde{h}$ es diferenciable si y sólo si la representación h es diferenciable.[1]

Esta discusión muestra la utilidad del cambio de coordenadas para definir la diferenciabilidad de una función por medio de la propiedad correspondiente de una representación: Las propiedades del cambio de coordenadas hacen que la diferenciabilidad no dependa de la representación.

Definición 2.23. Sea S una superficie diferenciable. Una transformación $f : S \to \mathbb{R}^n$ es **diferenciable** en el punto $p \in S$ si y sólo si existe una parametrización (U, φ) alrededor de p tal que la representación $h = f \circ \varphi$ es diferenciable en el punto $(u_0, v_0) = \varphi^{-1}(p)$. Se dice que la función f es **diferenciable** en S si lo es en cada punto $p \in S$.

Ejemplo 2.24. *Sea S una superficie diferenciable y sea (U, φ) una parametrización de una vecindad de un punto $p \in S$. Se afirma que la carta $\psi = \varphi^{-1} : U \to \Omega$ es diferenciable en p, en el sentido de la definición anterior.*

En efecto, la función ψ tiene la representación $h : \Omega \to \Omega$ dada por

$$h(u, v) = (\psi \circ \varphi)(u, v) = (u, v) = \mathrm{Id}(u, v),$$

[1] Esto es equivalente a que las transformaciones de transición $\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$ sean diferenciables.

la cual es diferenciable. ▷

2.3 El espacio tangente

En la sección 0.8 establecimos una diferencia entre cada punto p de $\mathbb{R}^3$ y los vectores anclados en dicho punto, definiendo su espacio tangente $T_p\mathbb{R}^3$. Utilizaremos esta distinción para definir el espacio tangente a la superficie S en un punto p.

Definición 2.25. Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$ y $p \in S$. El conjunto de vectores anclados en p dado por

$$\{\, \xi \in T_p\mathbb{R}^3 \mid \text{existe } \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to S, \text{ con } \gamma(0) = p \text{ y } \dot{\gamma}(0) = \xi \}$$

se llama el **espacio tangente** a S en p, y se le denota por T_pS.

Así, T_pS es el conjunto de vectores tangentes a todas las curvas contenidas en la superficie S y que pasan por el punto p. Observe que, en general, S y T_pS son dos conjuntos muy distintos y que la distinción entre los *puntos* de una superficie y los *vectores* tangentes es evidente. Como habíamos señalado con anterioridad, esta diferencia se obscurece en los casos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

La definición 2.25 es adecuada para nuestros fines. Por desgracia, tiene un defecto: A diferencia de $T_p\mathbb{R}^2$ o $T_p\mathbb{R}^3$, no es claro de la definición que T_pS sea un espacio vectorial. La siguiente proposición nos dice que T_pS es en realidad un espacio vectorial, dado por la imagen de los vectores tangentes al punto $q \in \Omega$ bajo la diferencial $d\varphi_q$ de una parametrización. (Véase la figura 2.16.)

Proposición 2.26. *Sea $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización de S en el punto $p = \varphi(q)$, $q \in \Omega$. Entonces la imagen de $T_q\mathbb{R}^2$ bajo $d\varphi_q$ es el espacio tangente a S en p; es decir,*

$$T_pS = d\varphi_q(T_q\mathbb{R}^2).$$

Demostración. Sea $\xi \in T_pS$. Entonces existe una curva $\gamma : J = (-\epsilon, \epsilon) \to S$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = \xi$.

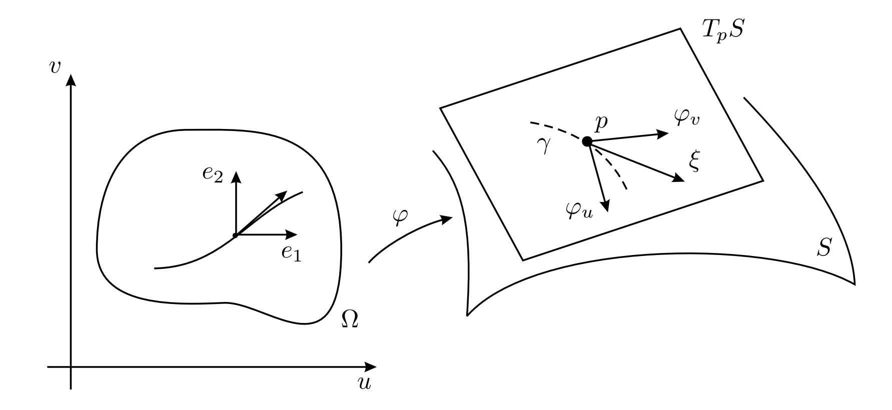


Figura 2.16: Espacio tangente T_pS a la superficie S en el punto p.

Considérese la curva $\beta = \varphi^{-1} \circ \gamma : J \to \Omega$; es decir, $\gamma = \varphi \circ \beta$. Tenemos que $\beta(0) = q$. Además, se tiene que para $t \in J$,

$$\dot{\gamma}(t) = d\varphi_{\beta(t)}(\dot{\beta}(t)).$$

En consecuencia, si $\dot{\beta}(0) = \eta \in T_q\mathbb{R}^2$, tenemos que $d\varphi_q(\eta) = \xi$, lo que dice que ξ está en $d\varphi_q(T_q\mathbb{R}^2)$.

De manera recíproca, sea $\xi \in d\varphi_q(T_q\mathbb{R}^2)$. Entonces existe $\eta \in T_q\mathbb{R}^2$ tal que $d\varphi_q(\eta) = \xi$. Considérese ahora la recta $\beta(t) = q + t\eta$. Es claro que $\beta(0) = q$ y que $\dot{\beta}(0) = \eta$.

Si se define $\gamma(t) = \varphi(\beta(t))$, en este caso se tiene que

$$\dot{\gamma}(t) = d\varphi_{\beta(t)}(\dot{\beta}(t)),$$

con lo que $\dot{\gamma}(0) = d\varphi_q(\eta) = \xi$, lo que dice que $\xi \in T_pS$ y concluye la prueba de la proposición. □

Sean S una superficie diferenciable y $\varphi : \Omega \to S$ una parametrización de S. Dada una curva $\gamma : J \to S$ se tiene que existe $\beta : J \to \Omega$ tal que $\gamma(t) = \varphi(\beta(t))$.

Si escribimos $\beta(t) = (u(t), v(t))$ y $\varphi = \varphi(u, v)$ se tiene entonces que

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\varphi(u(t), v(t)) = \varphi_u \dot{u}(t) + \varphi_v \dot{v}(t)$$

donde

$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Por lo tanto, si $\dot{\gamma}(0)$ es un vector tangente a S en el punto $p = \varphi(q)$, se tiene que

$$\dot{\gamma}(0) = \varphi_u(q)\dot{u}(0) + \varphi_v(q)\dot{v}(0).$$

Esto dice que cualquier vector tangente ξ se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\varphi_u(q)$ y $\varphi_v(q)$. Además, el lector puede verificar que $\varphi_u(q)$ y $\varphi_v(q)$ son linealmente independientes. De esta forma, T_pS es un espacio vectorial real de dimensión 2, con una base dada por $\{\varphi_u, \varphi_v\}_q$.

Ejemplo 2.27. *Considérese la esfera $\mathbb{S}^2_R$ de radio R en $\mathbb{R}^3$. La parametrización por coordenadas co-geográficas está dada por*

$$\varphi(\phi, \theta) = (R\cos\phi \operatorname{sen}\theta, R\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, R\cos\theta),$$

de donde

$$\begin{aligned} \varphi_\phi &= (-R\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, R\cos\phi\operatorname{sen}\theta, 0), \\ \varphi_\theta &= (R\cos\phi\cos\theta,\ R\operatorname{sen}\phi\cos\theta, -R\operatorname{sen}\theta). \end{aligned}$$

La base del espacio tangente a $\mathbb{S}^2_R$ en el punto $\varphi(\pi/2, \pi/2) = (0, R, 0)$ está formada por los vectores

$$\varphi_\phi(\pi/2, \pi/2) = (0, 0, -R), \quad \varphi_\theta(\pi/2, \pi/2) = (-R, 0, 0),$$

con lo que cualquier vector $\xi \in T_{(0,R,0)}\mathbb{S}^2_R$ es de la forma

$$\xi = (-R, 0, 0)w^1 + (0, 0 - R)w^2 = (-Rw^1, 0, -Rw^2)$$

En particular, esto muestra que el plano tangente en $(0, R, 0)$ es paralelo al plano xz. ▷

Ejemplo 2.28. *Consideremos la parametrización φ de la hoja superior L^2 del hiperboloide de dos hojas dada por*

$$\begin{aligned} x &= R\operatorname{senh}\theta\cos\phi, \\ y &= R\operatorname{senh}\theta\operatorname{sen}\phi, \\ z &= R\cosh\theta, \end{aligned}$$

con $(\phi,\theta)\in(0,2\pi)\times\mathbb{R}=\Omega$.

Si $q\in\Omega$ *y* $p=\varphi(q)$, *entonces*

$$\begin{aligned}\varphi_\phi &= (-R\,\mathrm{senh}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\ R\,\mathrm{senh}\,\theta\ \cos\phi, 0)\\ \varphi_\theta &= (R\cosh\theta\ \cos\phi,\ R\cosh\theta\ \mathrm{sen}\,\phi,\ R\,\mathrm{senh}\,\theta)\end{aligned}$$

lo que nos dice que

$$\begin{aligned}\xi &= a_1\varphi_\phi(q)+a_2\varphi_\theta(q)\\ &= a_1R(-\,\mathrm{senh}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\mathrm{senh}\cos\phi,0)|_q\\ &\quad +a_2R(\cosh\theta\cos\phi,\cosh\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\mathrm{senh}\,\theta)|_q,\end{aligned}$$

es la expresión general para cada vector $\xi\in T_pL^2$. ▷

Ahora considérese el caso cuando la superficie S puede describirse localmente mediante una ecuación de la forma

$$F(x,y,z)=0.$$

Si $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$ es una curva sobre la superficie S se tiene que

$$0=F(\gamma(t))=F(x(t),\,y(t),\,z(t)),$$

de donde

$$0=\frac{d}{dt}F(r(t))=\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}(t)+\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}(t)+\frac{\partial F}{\partial z}\dot{z}(t)$$

Esto nos dice que el **vector gradiente** en el punto $\gamma(t)$ dado por

$$\nabla F_{\gamma(t)}=\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t)),\frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t)),\ \frac{\partial F}{\partial z}(\gamma(t))\right)$$

es normal al plano $T_{\gamma(t)}S$, pues el vector $(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ es tangente a S en $\gamma(t)$ por definición.

Si ξ es cualquier vector tangente en T_pS, tenemos que $\langle\nabla F_p,\xi\rangle=0$, que es la forma vectorial de la ecuación del plano tangente.

Ejemplo 2.29. *Consideremos un cono C con vértice en el origen de coordenadas, definido en las coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^3$ por la ecuación*

$$z^2-x^2-y^2=0.$$

La función

$$F(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2$$

define al cono como la imagen inversa de 0*:* $C = F^{-1}(0)$*. El gradiente de* F *es*

$$\nabla F_{(x,y,z)} = (-2x, -2y, 2z),$$

que se anula en el punto vértice del cono $(0,0,0)$*. Esto dice que* 0 *no es un valor regular de* F*. Además, en el punto* $(0,0,0)$ *del cono no está definido el espacio tangente.* ▷

2.4 La primera forma fundamental

En esta sección definimos el concepto de primera forma fundamental para una superficie, y a partir de éste revisaremos las definiciones de longitud de curva, área de una región y ángulo entre dos curvas.

En lo que resta del capítulo utilizaremos el producto escalar en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2 + \xi^3\eta^3.$$

Sabemos que la norma de un vector $\xi \in \mathbb{R}^3$ es calculada a partir de la fórmula

$$\|\xi\| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}.$$

Más aún, si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ es una curva diferenciable y $\ell(\gamma)$ denota la longitud de la curva en el intervalo $[a,b]$, entonces

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt,$$

donde $t \in [a,b]$.

Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y $\langle\, , \rangle$ en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar euclidiano usual. Usamos $\langle\, , \rangle$ para heredar un producto escalar $\langle\, , \rangle_p$ en T_pS de la siguiente forma. Si $\xi, \eta \in T_pS$ entonces definimos

$$\langle \xi, \eta \rangle_p := \langle \xi, \eta \rangle,$$

lo que llamaremos la **primera forma fundamental** de S en p.[2]

Del álgebra lineal sabemos que un producto escalar tiene asociada una matriz, la cual calcularemos a continuación.

Sean $\varphi : \Omega \to S$ una parametrización con coordenadas (u, v) y $\gamma : J \to S$ una curva tal que

$$\gamma(0) = p, \quad \dot{\gamma}(0) = \xi.$$

La curva γ se puede escribir, como ya lo hemos mencionado, de la forma $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ para alguna curva $(u(t), v(t))$ en Ω.

Entonces, debido a que $\dot{\gamma}(0) = \dot{u}(0)\varphi_u + \dot{v}(0)\varphi_v$, tenemos que

$$\|\dot{\gamma}(0)\|^2 = \langle \dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)\rangle = \langle \dot{u}(0)\varphi_u + \dot{v}(0)\varphi_v,\ \dot{u}(0)\varphi_u + \dot{v}(0)\varphi_v\rangle,$$

de modo que la norma de $\xi = \dot{\gamma}(0)$ se calcula mediante

$$\|\xi\|_p^2 = \dot{u}(0)^2\langle\varphi_u, \varphi_u\rangle + 2\dot{u}(0)\dot{v}(0)\langle\varphi_u, \varphi_v\rangle + \dot{v}(0)^2\langle\varphi_v, \varphi_v\rangle.$$

Denotamos

$$\begin{aligned} E &= \langle\varphi_u, \varphi_u\rangle, \\ F &= \langle\varphi_u, \varphi_v\rangle = \langle\varphi_v, \varphi_u\rangle, \\ G &= \langle\varphi_v, \varphi_v\rangle, \end{aligned}$$

para escribir lo anterior como

$$\begin{aligned} \|\xi\|_p^2 &= E\dot{u}(0)^2 + 2F\dot{u}(0)\dot{v}(0) + G\dot{v}(0)^2 \\ &= (\dot{u}(0)\ \dot{v}(0)) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}(0) \\ \dot{v}(0) \end{pmatrix} = \xi^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \xi, \end{aligned}$$

donde ξ^T denota la transpuesta del vector (columna) ξ.

Definición 2.30. La matriz simétrica dada por

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

se llama la **matriz de coeficientes** de la primera forma fundamental de S en el punto p.

[2]En cursos más avanzados, donde se extienden estas ideas a ambientes más generales, la primera forma fundamental también se suele llamar **métrica riemanniana**.

Observación. Cuando se extiende el concepto de primera forma fundamental a ambientes de dimensión mayor, se acostumbra denotar por (g_{ij}) a esta matriz de coeficientes.

Para cada punto p en la imagen de la parametrización se obtiene una matriz de la primera forma fundamental, lo que nos indica que en una vecindad de tal punto se obtiene toda una familia de matrices. Cada matriz define un producto escalar en el espacio tangente correspondiente, heredado por el producto escalar del espacio ambiente $\mathbb{R}^3$.

A continuación calcularemos las matrices de coeficientes de la primera forma fundamental para algunas superficies.

Ejemplo 2.31. *Sea P un plano que contenga al punto q, paralelo a los vectores ortonormales ξ_1 y ξ_2. Entonces la transformación $\varphi : \mathbb{R}^2 \to P$ dada por*

$$\varphi(u,v) = q + u\xi_1 + v\xi_2$$

es una parametrización global de P. Para cada punto $p \in P$ se cumple

$$\varphi_u = \xi_1, \quad \varphi_v = \xi_2.$$

Los coeficientes de la primera forma fundamental en cada punto de P son

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \langle \xi_1, \xi_1 \rangle = 1, \\ F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle = 0, \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \langle \xi_2, \xi_2 \rangle = 1. \end{aligned}$$

Esto es, en cualquier punto la matriz de coeficientes de la primera forma fundamental en P es la identidad. ▷

Ejemplo 2.32. *El cilindro circular recto C se define en términos de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, con z arbitrario.*

Una parametrización local está dada por $\varphi(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$ donde $u \in (0, 2\pi)$, $v \in \mathbb{R}$.

Un cálculo directo prueba que en el punto $p = \varphi(u,v)$ tenemos una base de T_pC formada por los vectores

$$\varphi_u = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0), \quad \varphi_v = (0,0,1).$$

Por lo tanto, los coeficientes de la primera forma fundamental en C son

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1, \\ F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0, \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 1. \end{aligned}$$

Como en el ejemplo anterior, se tiene que la matriz de coeficientes en cada punto de C es igual a la identidad. $\triangleright$

Ejemplo 2.33. *Considérese a la esfera $\mathbb{S}^2_R$, parametrizada localmente por las coordenadas co-geográficas (ϕ, θ).*

Se ha obtenido ya que

$$\begin{aligned} \varphi_\phi &= (-R \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta,\ R \cos \phi \operatorname{sen} \theta, 0), \\ \varphi_\theta &= (R \cos \phi \cos \theta,\ R \operatorname{sen} \phi\, \cos \theta,\ -R \operatorname{sen} \theta), \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_\phi, \varphi_\phi \rangle = R^2 \operatorname{sen}^2 \theta, \\ F &= \langle \varphi_\theta, \varphi_\phi \rangle = 0, \\ G &= \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle = R^2, \end{aligned}$$

son los coeficientes de la primera forma fundamental de $\mathbb{S}^2_R$ en el punto (ϕ, θ). $\triangleright$

Ejemplo 2.34. *Consideremos ahora una superficie de revolución $S \subset \mathbb{R}^3$ obtenida al hacer girar alrededor del eje z una curva Γ parametrizada por $x = f(u)$ y $z = g(u)$, $u \in (a, b)$, la cual no interseca a tal eje.*

Una parametrización local de S está dada por

$$\varphi(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \operatorname{sen} v, g(u)),$$

con $(u, v) \in \Omega = (a, b) \times (0, 2\pi)$.

De esta forma, si calculamos la base de T_pS para cualquier punto $p \in S$ se tiene

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (f'(u) \cos v,\ f'(u) \operatorname{sen} v,\ g'(u)), \\ \varphi_v &= (-f(u) \operatorname{sen} v,\ f(u) \cos v,\ 0), \end{aligned}$$

donde ($'$) *denota la derivada ordinaria respecto a* u. *Esto nos lleva a que los coeficientes de la primera forma fundamental son*

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = f'(u)^2 + g'(u)^2, \\ F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0, \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = f(u)^2. \end{aligned}$$

Para ilustrar esto, en el caso del toro T^2 *se tienen las funciones*

$$f(u) = a + R\cos u \quad y \quad g(u) = R\,\mathrm{sen}\, u,$$

de donde, la matriz de coeficientes de la primera forma fundamental para el toro T^2 *está dada por*

$$\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & (a + R\cos u)^2 \end{pmatrix}$$

para la parametrización en cuestión. ▷

2.5 Longitud y ángulos en superficies

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y sea $\gamma : [a, b] \to S$ una curva diferenciable en S. Vista desde el espacio ambiente $\mathbb{R}^3$, la longitud de la curva $\gamma \subset S$ se calcula mediante la fórmula

$$\ell = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle} dt.$$

(Véase la figura 2.17.) Como $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle &= \langle \varphi_u \dot{u}(t) + \varphi_v \dot{v}(t), \varphi_u \dot{u}(t) + \varphi_v \dot{v}(t) \rangle \\ &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \dot{u}^2(t) + 2\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \dot{u}(t)\dot{v}(t) + \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \dot{v}^2(t) \\ &= E\dot{u}^2(t) + 2F\dot{u}(t)\dot{v}(t) + G\dot{v}^2(t), \end{aligned}$$

lo que implica que, desde el punto de vista de la superficie, la longitud ℓ se calcula por

$$\ell = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}^2(t) + 2F\dot{u}(t)\dot{v}(t) + G\dot{v}^2(t)}\, dt$$

Al estilo del cálculo, usaremos la notación de las diferenciales para escribir de otra manera la expresión anterior. Recordemos que $\dot{u} = du/dt$ y $\dot{v} = dv/dt$ y escribamos

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{du^2}{dt^2},$$

y de manera similar para dv/dt, de modo que

$$\sqrt{E\dot{u}^2(t) + 2F\dot{u}(t)\dot{v}(t) + G\dot{v}^2(t)}\,dt = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2};$$

denotaremos por ds^2 a la expresión dentro de la raíz[3] y la usaremos como otra notación para la primera forma fundamental; así,

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2;$$

o bien, en forma matricial,

$$ds^2 = (du\ dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

Observación. En cursos más avanzados se da un significado formal a expresiones como du o dv. Por el momento, usaremos estas notaciones sólo de una manera intuitiva.

Ejemplo 2.35. *Consideremos los siguientes ejemplos ya conocidos, con la notación dada.*

a. *Para el plano P y la parametrización $\varphi(u,v) = q + u\xi_1 + v\xi_2$, la primera forma fundamental se escribe*

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

b. *Para el cilindro circular recto en coordenadas (u,v), la primera forma fundamental se escribe*

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

[3]En algunos contextos, ds se llama la **diferencial de longitud de arco**.

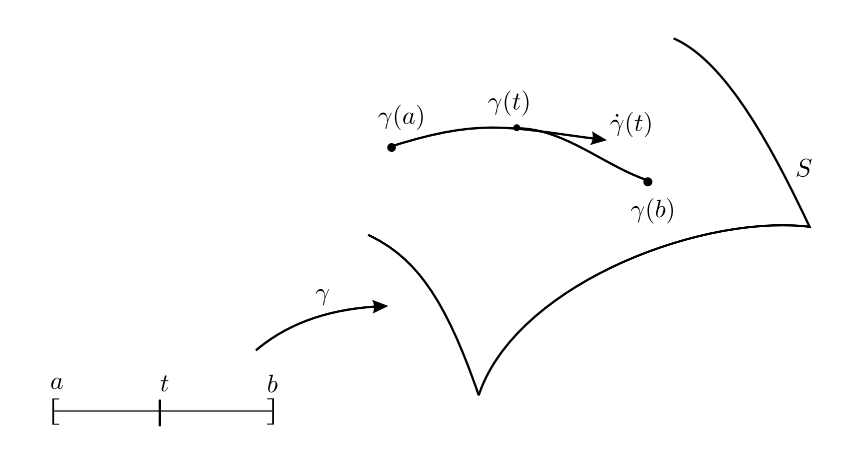


Figura 2.17: Longitud de arco en la superficie S.

c. *Para la esfera* $\mathbb{S}^2_R$ *en coordenadas co-geográficas la primera forma fundamental se define por*

$$ds^2 = R^2(\operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2 + d\theta^2).$$

d. *Para el toro* T^2 *obtenido como una superficie de revolución con coordenadas* (u, v)*, tenemos que*

$$ds^2 = R^2 du^2 + (a + R\cos u)^2 dv^2.$$

$\triangleright$

Considérense dos curvas diferenciables $\gamma_1, \gamma_2 : J \to S$ que se intersecan en un punto $\gamma_1, (t_0) = \gamma_2(t_0)$, y cuyos vectores tangentes son respectivamente $\xi_1 = \dot\gamma_1(t_0)$ y $\xi_2 = \dot\gamma_2(t_0)$. Desde el espacio ambiente el **ángulo** entre las curvas en el punto común $p = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ se calcula mediante

$$\text{ángulo}(\gamma_1, \gamma_2) = \arccos\left(\frac{\langle\xi_1, \xi_2\rangle}{\|\xi_1\|\|\xi_2\|}\right).$$

Ya que ξ_1 y ξ_2 están en el espacio tangente T_pS entonces

$$\text{ángulo}\,(\gamma_1, \gamma_2) = \arccos\left(\frac{\langle\xi_1, \xi_2\rangle_p}{\|\xi_1\|_p\|\xi_2\|_p}\right).$$

Aquí se entiende que el producto escalar de los vectores tangentes ξ_1 y ξ_2 en la primera forma fundamental inducida en S se calcula por

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \xi_2^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \xi_1.$$

2.6 Área de regiones

Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y $\varphi : \Omega \to S$ una parametrización de una cierta región $R \subset S$. Dado un punto $p \in R$ y $q \in \Omega$ tal que $\varphi(q) = p$, se tiene que $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ generan al plano tangente T_pS. Si se considera dA como un infinitésimo del área de R alrededor del punto p, se tiene que

$$dA = \|\varphi_u \, du \times \varphi_v \, dv\|,$$

con lo que, hasta un infinitésimo (véase la figura 2.18), en cualquier punto $p \in R$ se cumple

$$dA = \|\varphi_u \times \varphi_v\| du \, dv.$$

De esta manera, para calcular el área de la región R es necesario calcular la integral de esta expresión sobre todo el dominio. Esto nos lleva a la siguiente definición.

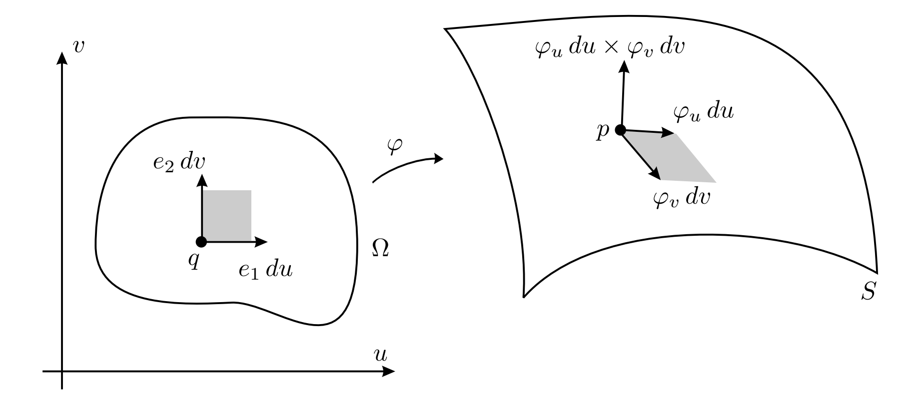


Figura 2.18: Área de una superficie diferenciable.

Definición 2.36. Definimos el **área de la región** $R \subset S$ como

$$\text{Área } (R) = \int_\Omega \|\varphi_u \times \varphi_v\| du\, dv.$$

Observación. Si θ denota el ángulo que forman los vectores tangentes básicos φ_u y φ_v, entonces

$$\begin{aligned} \|\varphi_u \times \varphi_v\|^2 &= \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta = \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 \\ &= EG - F^2 = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Por lo tanto, el área de la región R se calcula mediante la fórmula

$$\text{Área}\,(R) = \int_\Omega \sqrt{EG - F^2} du\, dv.$$

Ejemplo 2.37 (Área del toro)**.** *Considérese la parametrización de una región del toro $T^2 \subset \mathbb{R}^3$, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3$, dada en las coordenadas*

$$\varphi(u, v) = ((a + R \cos u) \cos v,\ (a + R \cos u) \operatorname{sen} v, R \operatorname{sen} u),$$

donde el dominio de parametrización Ω está dado por $0 < u < 2\pi$ y $0 < v < 2\pi$.

Los coeficientes de la primera forma fundamental sobre el toro son

$$\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & (a + R \cos u)^2 \end{pmatrix}$$

lo que implica que

$$EG - F^2 = R^2 (a + R \cos u)^2$$

Para $\epsilon > 0$ consideramos al conjunto

$$\Omega_\epsilon = (\epsilon, 2\pi - \epsilon) \times (\epsilon, 2\pi - \epsilon) \subset \Omega$$

y calculamos el área de $\varphi(\Omega_\epsilon)$. Después calculamos el límite cuando $\epsilon \to 0$ para obtener el área del toro. Esto es, consideramos

$$\int_{\Omega_\epsilon} \sqrt{EG - F^2}du\,dv = \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} \sqrt{R^2(a + R\cos u)^2}du\,dv.$$

Utilizando el teorema de Fubini, se ve que la última expresión es igual a

$$(2\pi - 2\epsilon) \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} R(a + R\cos u)du = R(2\pi a - 2a\epsilon + R(\operatorname{sen}(2\pi - \epsilon) - \operatorname{sen}\epsilon)).$$

Ya que sólo un meridiano y un paralelo no son cubiertos por la parametrización y este conjunto tiene área cero en el toro, se sigue que

$$\begin{aligned} \acute{A}rea\,(T^2) &= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\Omega_\epsilon} \sqrt{EG - F^2}du\,dv \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}(2\pi - 2\epsilon)R[2\pi a - 2a\epsilon + R(\operatorname{sen}(2\pi - \epsilon) - \operatorname{sen}\epsilon)] \end{aligned}$$

de modo que el área del toro es $4\pi^2 aR$. ▷

Ejemplo 2.38 (Área de la esfera)**.** *Para calcular el área de $\mathbb{S}^2_R$, utilizamos la parametrización por coordenadas co-geográficas.*

Ya que la matriz de coeficientes de la primera forma fundamental en $\mathbb{S}^2_R$ es

$$\begin{pmatrix} R^2 \operatorname{sen}^2\theta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

y la parametrización omite un meridiano, entonces podemos usar un razonamiento análogo al del ejemplo anterior para obtener que

$$\acute{A}rea\,(\mathbb{S}^2_R) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{R^4 \operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta\,d\phi = 2\pi\,R^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta = 4\pi R^2,$$

como era de esperar. ▷

2.7 Superficies isométricas

Uno de los principales problemas en la matemática es la clasificación de objetos que tienen las mismas características: algebraicas, topológicas, métricas, etcétera.

El problema de clasificación de las superficies de acuerdo con sus propiedades métricas se resuelve a través de la idea de **isometría**.

Definición 2.39. Sean $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos superficies regulares.

a. Una transformación $f : S_1 \to S_2$ es una **isometría** entre las superficies S_1 y S_2 si y sólo si f es un difeomorfismo tal que para todo $p \in S_1$ y cualquier pareja de vectores ξ_1, ξ_2 en el espacio tangente T_pS_1 es válida la igualdad

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_p = \langle df_p(\xi_1), df_p(\xi_2) \rangle_{f(p)}.$$

S_1 y S_2 son **(globalmente) isométricas** si y sólo si existe una isometría $f : S_1 \to S_2$.

b. Una transformación $f : S_1 \to S_2$ es una **isometría local en** $p \in S_1$ si y sólo si existe una vecindad U de p en S_1 tal que $f|_U : U \to f(U)$ es una isometría. f es una **isometría local** si y sólo si f es una isometría local en p para todo $p \in S_1$.

S_1 y S_2 son **localmente isométricas** si y sólo si existen isometrías locales $f : S_1 \to S_2$ y $g : S_2 \to S_1$.

Desde el punto de vista geométrico, la definición de isometría (local o global) nos habla de la preservación del producto escalar en T_pS_1 bajo la diferencial de df_p al tangente $T_{f(p)}S_2$. Además, la relación "ser isométricas" es una relación de equivalencia en el conjunto de superficies, como se puede verificar en forma directa.

Observación. Veamos qué ocurre en términos matriciales. Si $\varphi_1 : \Omega_1 \to U_1 \subset S_1$ y $\varphi_2 : \Omega_2 \to U_2 \subset S_2$ son parametrizaciones locales de las superficies S_1 y S_2, de modo que

$$G_1 = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad G_2 = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}$$

son las primeras formas fundamentales correspondientes en U_1 y U_2 y

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_p$$

es la matriz jacobiana de una transformación $f : S_1 \to S_2$, entonces f es una isometría en p si y sólo si

$$\langle \xi, \eta \rangle_p = \eta^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \xi$$

es igual a

$$\begin{aligned}\langle df_p(\xi), df_p(\eta)\rangle_{f(p)} &= df_p(\eta)^T \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} df_p(\xi) \\ &= \eta^T \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p^T \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p \xi\end{aligned}$$

para cualesquiera vectores $\xi, \eta \in T_pS_1$. Esto nos dice que f es una isometría en p si y sólo si la ecuación matricial

$$G_1 = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p^T \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p = A^T G_2 A$$

es válida en p.

Supongamos que S_1 y S_2 son localmente isométricas y sea $f : U_1 \to U_2 = f(U_1) \subset S_2$ una isometría local alrededor del punto $p \in S_1$. Supongamos además que $\varphi : \Omega \to U_1$ es una parametrización de U_1 con coordenadas (u, v). La composición

$$\widetilde{\varphi} = f \circ \varphi : \Omega \to U_2$$

es una nueva parametrización de la vecindad U_2 del punto $q = f(p)$, con las coordenadas (u, v). En otras palabras, f hace corresponder al punto en U_1 con coordenadas (u, v) el punto en U_2 con las mismas coordenadas. Para que se preserve el producto escalar en T_qS_2, bastará entonces que

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

En este caso, la igualdad implica que la longitud de una curva γ_1 en S_1 dada por las ecuaciones $u = u(t), v = v(t)$ tiene la misma expresión que la longitud de la curva correspondiente $\gamma_2 = f(\gamma_1)$ en S_2.

Por otro lado, si $f : S_1 \to S_2$ es un difeomorfismo y

$$\begin{aligned} ds^2 &= E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 \\ d\tilde{s}^2 &= \widetilde{E}\, du^2 + 2\widetilde{F}\, du\, dv + \widetilde{G}\, dv^2 \end{aligned}$$

son las primeras formas fundamentales correspondientes en S_1 y S_2, se tiene que

$$\begin{aligned}\ell(\gamma_1) &= \int_{\gamma_1} \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} \\ &= \int_{\gamma_2} \sqrt{\widetilde{E}\,du^2 + 2\widetilde{F}\,du\,dv + \widetilde{G}\,dv^2} = \ell(\gamma_2).\end{aligned}$$

Ya que la curva $\gamma_1 \subset S_1$ es arbitraria, los integrandos coinciden para cualesquiera valores de $du = \dot{u}\,dt$, $dv = \dot{v}\,dt$. Pero esto ocurre si y sólo si $E = \tilde{E}$, $F = \tilde{F}$ y $G = \tilde{G}$.

Hemos demostrado el siguiente resultado importante.

Teorema 2.40. *Con la notación anterior, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a. *f es una isometría local.*

b. *$E = \tilde{E}$, $F = \tilde{F}$ y $G = \tilde{G}$.*

c. *$\ell(\gamma_1) = \ell(f \circ \gamma_1)$ para toda curva γ_1.*

De aquí se desprende el siguiente resultado.

Corolario 2.41. *Suponga que existen parametrizaciones de S_1 y S_2 definidas en una misma región Ω dadas por*

$$\varphi_1 : \Omega \to S_1, \quad \varphi_2 : \Omega \to S_2,$$

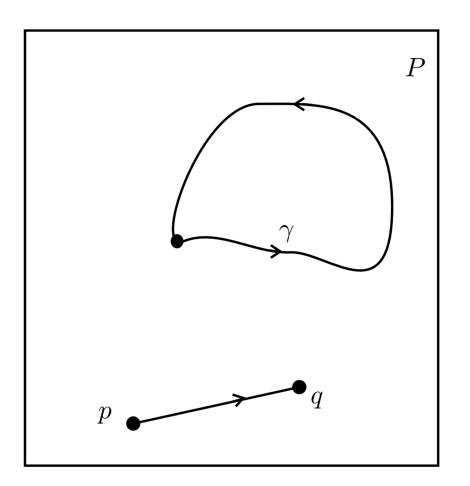
tales que en las coordenadas (u, v) los coeficientes de las primeras formas fundamentales de S_1 y S_2 coinciden; es decir, $E = \tilde{E}$, $F = \tilde{F}$ y $G = \tilde{G}$. Entonces $f = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : S_1 \to S_2$ es una isometría local.

Ejemplo 2.42. *Se ha visto que para cualquier plano P parametrizado por $\varphi_1(u, v) = p + u\xi + v\eta$ la primera forma fundamental inducida en él por el producto escalar usual en $\mathbb{R}^3$ está dada por la identidad. Por otro lado, un cilindro parametrizado por*

$$\varphi_2(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$$

también tiene a la identidad como matriz de coeficientes de la primera forma fundamental en cada punto, de modo que el corolario 2.41 implica que el plano y el cilindro son localmente isométricos. La isometría no puede ser global; de hecho, C y P no son siquiera homeomorfos.

Observe que un homeomorfismo global entre C y P llevaría curvas contraíbles en curvas contraíbles. (Véase la figura 2.19.) Por un lado, cualquier curva cerrada γ en P puede contraerse a un punto, debido a que no hay "hoyos" en P. Por otro lado, C contiene curvas cerradas no contraíbles.



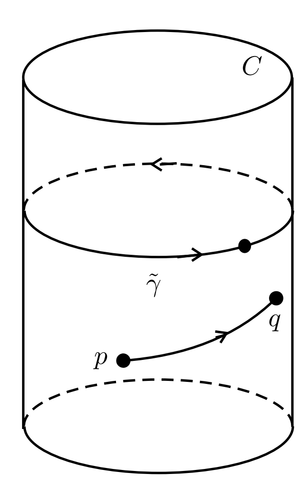


Figura 2.19: P es localmente (pero no globalmente) isométrico a C.

Otra forma simple de visualizar la isometría local de P y C es como sigue: Tómese un papel y márquese a dos puntos cercanos p y q sobre él, después enróllese para construir un cilindro. La distancia de p a q tanto en P como en C es la misma. ▷

El siguiente ejemplo nos muestra que en ocasiones la isometría local no es tan simple como en el ejemplo anterior, aunque la idea de enrollar una superficie para obtener otra es la misma.

Ejemplo 2.43. *Considere la superficie de revolución S_1, llamada la* **catenoide**, *con la parametrización local dada por la función* $\varphi_1 : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to$

$\mathbb{R}^3$, *donde*

$$\varphi_1(u,v) = (a\cosh v\cos u, a\cosh v \operatorname{sen} u, av)$$

y siendo $a > 0$. *(Véase la figura 2.20.) Se tiene entonces*

$$\begin{aligned} (\varphi_1)_u &= (-a\cosh v \operatorname{sen} u, a\cosh v\cos u, 0) \\ (\varphi_1)_v &= (a \operatorname{senh} v\cos u, a\operatorname{senh} v\operatorname{sen} u, a) \end{aligned}$$

Los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$\begin{aligned} E &= \langle(\varphi_1)_u, (\varphi_1)_u\rangle = a^2\cosh^2 v, \\ F &= F = \langle(\varphi_1)_u, (\varphi_1)_v\rangle = 0, \\ G &= \langle(\varphi_1)_v, (\varphi_1)_v\rangle = a^2\cosh^2 v. \end{aligned}$$

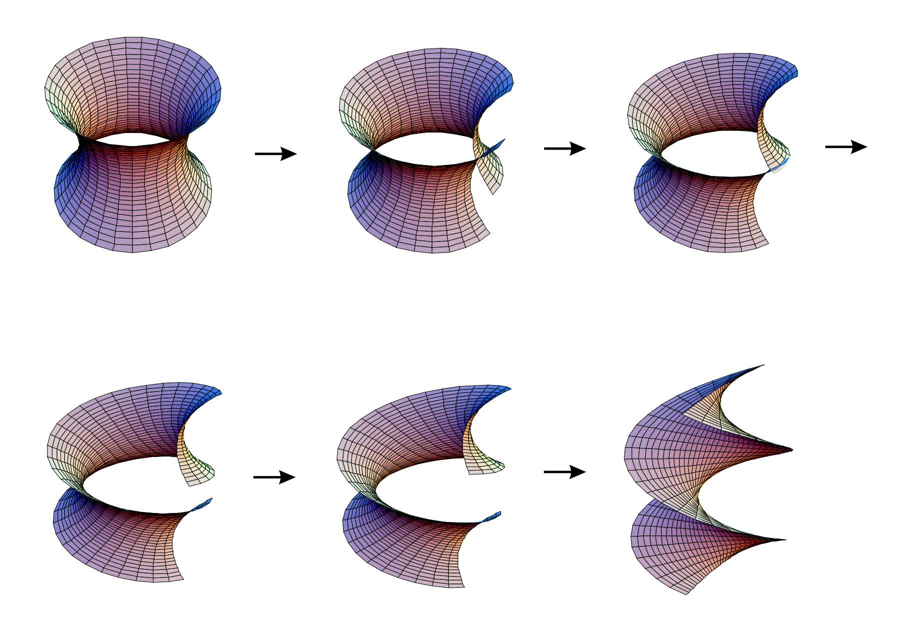


Figura 2.20: Isometría local entre la catenoide y la helicoide.

Por otro lado, considere a la superficie llamada **helicoide** S_2, *parametrizada localmente por la función* $\varphi_2 : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, *donde*

$$\varphi_2(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{v}\cos\tilde{u}, \tilde{v}\operatorname{sen}\tilde{u}, a\tilde{u})$$

con $a > 0$*. (Véase la figura 2.20.)*

Defínase la función $f : S_1 \to S_2$ *de tal manera que su representación* h *en las coordenadas* (u, v) *de* S_1 *y* $(\tilde{u}, \tilde{v})$ *de* S_2 *tenga la regla de correspondencia*

$$h(u, v) = (u, a \operatorname{senh} v) = (\tilde{u}, \tilde{v}).$$

Se afirma que f *es una isometría local entre las superficies regulares* S_1 *y* S_2*.*

En efecto, el jacobiano de h *es*

$$\left|Dh_{(u,v)}\right| = \frac{D(\tilde{u}, \tilde{v})}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \cosh v \end{vmatrix} = a \cosh v > 0.$$

Usando el teorema de la función inversa, tenemos que h *es un difeomorfismo local.*

Considere la reparametrización local de S_2 *mediante* $\varphi_2 = f \circ \varphi_1 : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *con la regla de correspondencia*

$$\varphi_2 = (f \circ \varphi_1)(u, v) = (a \operatorname{senh} v \cos u, a \operatorname{senh} v \operatorname{sen} u, au).$$

Las derivadas parciales de φ_2 *son*

$$\begin{aligned} (\varphi_2)_u &= (-a \operatorname{senh} v \operatorname{sen} u, a \operatorname{senh} v \cos u, a), \\ (\varphi_2)_v &= (a \cosh v \cos u, a \cosh v \operatorname{sen} u, 0), \end{aligned}$$

lo que implica que en las coordenadas (u, v) *los coeficientes de la primera forma fundamental son*

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = a^2 \operatorname{senh}^2 v + a^2 = a^2 \cosh^2 v, \\ \tilde{F} &= \tilde{F} = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0, \\ \tilde{G} &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = a^2 \cosh^2 v. \end{aligned}$$

Por el corolario 2.41, se sigue que las superficies catenoide y helicoide son localmente isométricas. (Véase la figura 2.20.) ▷

2.8 Superficies conformes

Más adelante introduciremos un criterio para decidir, con relativa facilidad, si dos superficies son isométricas. Sin embargo, también veremos que la exigencia de una transformación que preserve distancias y ángulos es muy fuerte. En esta sección reducimos el análisis al caso de las transformaciones que preservan ángulos y mencionamos un importante resultado en este sentido. Para esto necesitamos algunas definiciones.

Definición 2.44. Sean S_1 y $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos superficies diferenciables.

1. Una transformación $f : S_1 \to S_2$ es una **aplicación conforme** entre las superficies S_1 y S_2 si y sólo si f es un difeomorfismo y existe una función $\lambda : S_1 \to \mathbb{R}$ positiva y diferenciable tal que

   $$\langle df_p(\xi_1), df_p(\xi_2)\rangle_{f(p)} = \lambda(p)\langle \xi_1, \xi_2\rangle_p$$

   para todo $p \in S_1$ y cualesquiera $\xi_1, \xi_2 \in T_pS_1$.

   S_1 y S_2 son **(globalmente) conformes** o **conformemente equivalentes** si y sólo si existe una aplicación conforme $f : S_1 \to S_2$.

2. Una transformación $f : S_1 \to S_2$ es una **aplicación conforme local en** $p \in S_1$ si y sólo si existe una vecindad U de p en S_1 tal que $f|_U : U \to f(U)$ es una aplicación conforme. f es una **aplicación conforme local** si y sólo si f es una aplicación conforme local en p para todo $p \in S_1$.

   S_1 y S_2 son **localmente conformes** o **localmente conformemente equivalentes** si y sólo si existen aplicaciones conformes locales $f : S_1 \to S_2$ y $g : S_2 \to S_1$.

Es claro que la relación "ser conformes" es una relación de equivalencia entre las superficies.

El siguiente lema es un resultado que puede ser probado de igual forma que el teorema 2.40.

Lema 2.45. *Una condición necesaria y suficiente para que dos superficies S_1 y S_2 sean localmente conformes es la existencia de parametrizaciones $\varphi_1 : \Omega \to S_1$, $\varphi_2 : \Omega \to S_2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, tales que los coeficientes de las*

primeras formas fundamentales correspondientes sean proporcionales por la misma cantidad positiva $\lambda(p)$. Esto es,

$$E(p) = \lambda(p)\tilde{E}(p), \quad F(p) = \lambda(p)\tilde{F}(p), \quad G(p) = \lambda(p)\tilde{G}(p),$$

para cada p en Ω.

Observemos que una aplicación conforme $f : S_1 \to S_2$ preserva el ángulo entre vectores. De manera concreta, sean $\xi_1, \xi_2 \in T_pS_1$, θ el ángulo entre los vectores dados y $\widetilde{\theta}$ el ángulo entre los vectores imágenes $df_p(\xi_1)$ y $df_p(\xi_2)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\cos\widetilde{\theta} &= \frac{\langle df_p(\xi_1), df_p(\xi_2)\rangle}{\|df_p(\xi_1)\|\ \|df_p(\xi_2)\|} \\
&= \frac{\lambda(p)\langle df_p(\xi_1), df_p(\xi_2)\rangle}{\sqrt{\lambda(p)}\|df_p(\xi_1)\|\sqrt{\lambda(p)}\|df_p(\xi_2)\|} \\
&= \frac{\langle \xi_1, \xi_2\rangle_p}{\|\xi_1\|_p\|\xi_2\|_p} = \cos\theta.
\end{aligned}$$

Definición 2.46. Sea (u, v) un sistema de coordenadas en la superficie S tal que la primera forma fundamental en S es conformemente equivalente a la euclidiana. Esto es, al considerar la parametrización $\varphi : \Omega \to S$ con coordenadas (u, v), la primera forma fundamental en S toma la forma

$$ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2).$$

donde $\lambda = \lambda(u, v)$ es una función positiva. Tales coordenadas (u, v) se llamarán **isotermas** y la primera forma fundamental se dice **conformemente plana**.

Ejemplo 2.47. *En el ejemplo 2.43 se mostró que la catenoide con la parametrización*

$$\varphi(u, v) = (a \operatorname{senh} v \cos u, a \operatorname{senh} v \operatorname{sen} u, au)$$

en las coordenadas $(u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ tiene la primera forma fundamental

$$\begin{pmatrix} a^2\cosh^2 v & 0 \\ 0 & a^2\cosh^2 v \end{pmatrix} = (a^2\cosh^2 v)(\delta_{ij}),$$

conforme con la primera forma fundamental euclidiana (δ_{ij}). ▷

Ejemplo 2.48. *Ya se ha visto que* $\mathbb{S}^2_R$ *con las coordenadas co-geográficas* (ϕ, θ) *tiene la primera forma fundamental*

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2)$$

Consideremos un nuevo sistema de coordenadas (r, ϕ) *en la esfera al aplicar la proyección estereográfica vía el polo norte al plano horizontal provisto con coordenadas polares, como lo muestra la figura 2.21, dado por*

$$r = R\cot\left(\frac{\theta}{2}\right), \qquad \phi = \phi,$$

con inversa definida mediante las ecuaciones

$$\theta = 2\operatorname{arccot}\left(\frac{r}{R}\right), \qquad \phi = \phi.$$

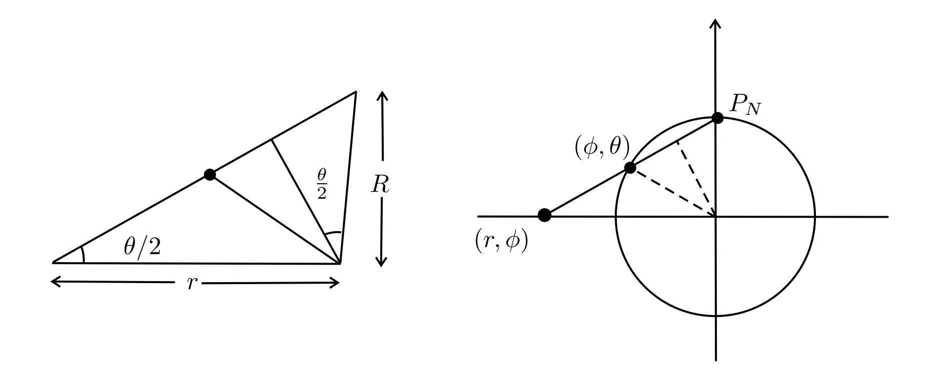


Figura 2.21: Proyección estereográfica de la esfera.

De la relación $r = R\cot(\theta/2)$ *tenemos que*

$$\operatorname{sen}\theta = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{R^2+r^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2+r^2}} = \frac{2rR}{R^2+r^2}.$$

Por otro lado, un cálculo directo prueba que

$$d\theta = -\frac{2Rdr}{R^2+r^2}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2) = R^2\left(\tfrac{4R^2dr^2}{(R^2+r^2)^2} + \tfrac{4R^2}{(R^2+r^2)^2}d\varphi^2\right) \\ &= \tfrac{4R^4r^2}{(R^2+r^2)^2}(dr^2 + r^2d\varphi^2). \end{aligned}$$

Ya que en las coordenadas cartesianas (x, y) *es válida la igualdad*

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2d\varphi^2$$

se concluye que

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + x^2 + y^2)^2}(dx^2 + dy^2)$$

y ésta es una primera forma fundamental conforme para la esfera. ▷

El siguiente resultado nos dice que si $S \subset \mathbb{R}^3$ admite una parametrización con funciones analíticas[4], entonces S es localmente conforme al plano euclidiano. Este teorema tiene una extensión para el caso C^∞, pero la demostración es más elaborada.

Teorema 2.49 (de Bers-Beltrami)**.** *Toda superficie* $S \subset \mathbb{R}^3$ *regular dotada de una primera forma fundamental analítica admite una reparametrización por coordenadas isotermas. Esto es, existe una parametrización de* S *por coordenadas* (u, v)*, tal que en estas coordenadas la primera forma fundamental se escribe*

$$ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2).$$

En virtud de que la relación de conformidad local es de equivalencia, se sigue el siguiente resultado.

Corolario 2.50. *Todas las superficies analíticas son localmente conformes.*

En el siguiente capítulo definiremos la curvatura de una superficie y aprovecharemos la existencia de las coordenadas isotermas para calcular de una manera sencilla este importante invariante geométrico.

A continuación incluimos un esbozo de la demostración del teorema 2.49, que puede omitirse en una primera lectura.

[4]Es decir, cada función se puede expresar mediante una serie de potencias convergente.

Demostración. Sea

$$\varphi(\tilde{u},\tilde{v}) = (x(\tilde{u},\tilde{v}), y(\tilde{u},\tilde{v}), z(\tilde{u},\tilde{v}))$$

una parametrización arbitraria. En estas coordenadas, la primera forma fundamental se escribe como

$$ds^2 = E\,d\tilde{u}^2 + 2F\,d\tilde{u}\,d\tilde{v} + G\,d\tilde{v}^2.$$

Si denotamos por $\sqrt{g}$ a $\sqrt{EG - F^2}$, una sencilla factorización de la primera forma fundamental dentro del plano complejo $\mathbb{C}$ nos da que

$$ds^2 = \left(\sqrt{E}\,d\tilde{u} + \frac{F + i\sqrt{g}}{\sqrt{E}}\,d\tilde{v}\right)\left(\sqrt{E}\,d\tilde{u} + \frac{F - i\sqrt{g}}{\sqrt{E}}\,d\tilde{v}\right).$$

Ya que el conjugado complejo del primer factor

$$\left(\sqrt{E}\,d\tilde{u} + \frac{F + i\sqrt{g}}{\sqrt{E}}\,d\tilde{v}\right)$$

es el otro factor, entonces se busca una función analítica $f(u,v)$ con valores complejos tal que se satisfagan las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} f(u,v)\left(\sqrt{E}\,d\tilde{u} + \tfrac{F+i\sqrt{g}}{\sqrt{E}}\,d\tilde{v}\right) &= du + i\,dv, \\ \bar{f}(u,v)\left(\sqrt{E}\,d\tilde{u} + \tfrac{F-i\sqrt{g}}{\sqrt{E}}\,d\tilde{v}\right) &= du - i\,dv, \end{aligned} \tag{2.2}$$

de modo que al multiplicar los términos de cada lado, tengamos

$$|f(u,v)|^2 ds^2 = du^2 + dv^2;$$

es decir,

$$ds^2 = |f(u,v)|^{-2}(du^2 + dv^2).$$

Para esto, bastaría definir la función de conformidad mediante la igualdad

$$\lambda(u,v) = \frac{1}{|f(u,v)|^2}$$

De esta forma, la función $\lambda(u,v)$ buscada depende de la función analítica con valores complejos $f(u,v)$, la cual es un factor integrante de (2.2).

Procedemos a buscar un cambio de coordenadas $u = u(\tilde{u}, \tilde{v}), v = v(\tilde{u}, \tilde{v})$ tal que satisfaga junto con $f(u, v)$ las condiciones anteriores. Si existe tal pareja de funciones u, v, éstas deberán satisfacer la ecuación

$$f(u,v)\left(\sqrt{E}d\tilde{u} + \frac{F + i\sqrt{g}}{\sqrt{E}}d\tilde{v}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + i\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right)d\tilde{u} + \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + i\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}\right)d\tilde{v}$$

Al desarrollar e igualar los coeficientes de $d\tilde{u}$ y $d\tilde{v}$, se debe cumplir

$$\begin{aligned} f(u,v)\sqrt{E} &= \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + i\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ f(u,v)\frac{F + i\sqrt{g}}{\sqrt{E}} &= \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + i\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}. \end{aligned}$$

Al despejar a f e igualar los resultados se obtiene la ecuación

$$(F + i\sqrt{g})\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + i\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right) = E\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + i\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}\right).$$

Al comparar la parte real e imaginaria de la última ecuación se llega al par de igualdades

$$\begin{aligned} F\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} - \sqrt{g}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} &= E\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \sqrt{g}\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + F\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} &= E\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}. \end{aligned}$$

De la primera ecuación se obtiene

$$\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(F\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} - E\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}\right),$$

mientras que de la segunda se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} &= \frac{1}{E}\left(\sqrt{g}\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + F\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right) = \frac{1}{E}\left(\sqrt{g}\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + F\frac{F\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} - E\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}}{\sqrt{g}}\right) \\ &= \frac{1}{E}\left(\sqrt{g}\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \frac{F^2\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} - EF\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}}{\sqrt{g}}\right) = \frac{1}{E}\left(\frac{g\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + F^2\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} - EF\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}}{\sqrt{g}}\right) \\ &= \frac{1}{E}\left(\frac{(EG - F^2)\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + F^2\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} - EF\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}}{\sqrt{g}}\right) = \frac{1}{E}\frac{EG\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} - EF\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}}{\sqrt{g}} \\ &= \frac{G\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} - F\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}}{\sqrt{g}}. \end{aligned}$$

Cálculos análogos nos muestran que se cumplen las igualdades

$$\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} = \frac{F\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} - E\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}}{\sqrt{g}}, \quad \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} = \frac{G\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} - F\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}}{\sqrt{g}}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} = \frac{E\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} - F\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}}{\sqrt{g}}, \quad \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} = \frac{F\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} - G\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}}{\sqrt{g}}.$$

De la igualdad de las parciales mixtas para la función v,

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{v}}\left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right) = \frac{\partial}{\partial \tilde{u}}\left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}\right)$$

y del primer par de ecuaciones, se tiene

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial \tilde{v}}\left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right) - \frac{\partial}{\partial \tilde{u}}\left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \tilde{v}}\left[\frac{F\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} - E\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}}{\sqrt{g}}\right] - \frac{\partial}{\partial \tilde{u}}\left[\frac{G\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} - F\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}}{\sqrt{g}}\right] \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{v}}\left[\frac{F\frac{\partial}{\partial \tilde{u}} - E\frac{\partial}{\partial \tilde{v}}}{\sqrt{g}}\right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{u}}\left[\frac{F\frac{\partial}{\partial \tilde{v}} - G\frac{\partial}{\partial \tilde{u}}}{\sqrt{g}}\right]\right)(u)
\end{aligned}$$

De manera análoga, de la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{v}}\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\right) = \frac{\partial}{\partial \tilde{u}}\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}\right)$$

y el segundo par de ecuaciones se concluye que

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{v}}\left[\frac{F\frac{\partial}{\partial \tilde{u}} - E\frac{\partial}{\partial \tilde{v}}}{\sqrt{g}}\right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{u}}\left[\frac{F\frac{\partial}{\partial \tilde{v}} - G\frac{\partial}{\partial \tilde{u}}}{\sqrt{g}}\right]\right)(v).$$

De esta forma, las funciones $u = u(\tilde{u}, \tilde{v}), v = v(\tilde{u}, \tilde{v})$ deberán satisfacer las ecuaciones diferenciales parciales $L(u) \equiv 0$ y $L(v) \equiv 0$, donde

$$L = \frac{\partial}{\partial \tilde{v}}\left[\frac{F\frac{\partial}{\partial \tilde{u}} - E\frac{\partial}{\partial \tilde{v}}}{\sqrt{EG - F^2}}\right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{u}}\left[\frac{F\frac{\partial}{\partial \tilde{v}} - G\frac{\partial}{\partial \tilde{u}}}{\sqrt{EG - F^2}}\right],$$

llamado el operador diferencial de Beltrami.

El teorema de S. Kovalevsky de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales implica que si E, F y G son funciones analíticas, las ecuaciones $L(u) \equiv 0$ y $L(v) \equiv 0$ tienen soluciones no triviales para las condiciones iniciales apropiadas.

Esto demuestra la existencia del cambio de coordenadas de la forma $u = u(\tilde{u}, \tilde{v})$, $v = v(\tilde{u}, \tilde{v})$. Por otro lado, de la igualdad

$$f(u, v) = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + i \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \right)$$

se obtiene el factor integrante f, y de allí la función buscada

$$\lambda(u, v) = \frac{1}{\|f(u, v)\|^2},$$

lo que termina la prueba. □

2.9 Ejercicios

1. Sea C el cono completo con vértice en el origen dado por la ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

   Demuestre que C no es una superficie topológica. Si sólo se considera a los puntos $(x, y, z) \in C$ tales que $z \geq 0$, determine dos parametrizaciones distintas de este conjunto.

2. Dé parametrizaciones explícitas (U, φ) de las siguientes superficies y determine los dominios de diferenciabilidad.

   (a) El elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

   mediante coordenadas esféricas.

   (b) El paraboloide hiperbólico

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

   con coordenadas cartesianas.

(c) El paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

con coordenadas cartesianas.

(d) El cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, como superficie de revolución.

(e) El paraboloide elíptico del inciso (c), como superficie de revolución.

(f) El cono del inciso (d), con coordenadas cilíndricas.

(g) El paraboloide $z = x^2 + y^2$, con coordenadas cilíndricas.

3. Para cada superficie S del ejercicio anterior, elija un punto arbitrario $p \in S$ y determine una vecindad de p en S que se vea como la gráfica de una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

4. ¿Cuál es el número mínimo de parametrizaciones necesarias para cubrir un toro? (*Sugerencia*: El dominio de una parametrización puede tener “hoyos”.)

5. Consideremos la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Un **círculo máximo** en $\mathbb{S}^2$ es la intersección de esta superficie con un plano que contiene al origen de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Muestre que la curva

   $$\alpha(s) = \cos s(0, -b, a) + \operatorname{sen} s(1, 0, 0),$$

   donde $a^2 + b^2 = 1$ y $s \in [0, 2\pi]$, es un círculo máximo en $\mathbb{S}^2$.

   (b) Considere a la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ como la superficie de revolución obtenida al girar una semicircunferencia en torno del eje z. Para cada $s \in [0, 2\pi]$, sea $\beta_s(t)$ el paralelo de $\mathbb{S}^2$ que pasa por $\alpha(s)$ para $t = 0$. Muestre que dicho paralelo es una circunferencia con radio $r(s)$ dado por

   $$r(s) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 s + b^2 \cos^2 s}.$$

(c) Determine una parametrización explícita de $\beta_s(t)$. (*Sugerencia*:

$$\beta_s(t) = \mathrm{Rot}_t(\alpha(s)),$$

donde Rot_t es una rotación con ángulo t que deja fijo al eje z.)

(d) Si $\theta(s)$ es el ángulo entre α y β_s, muestre que

$$r(s)\cos\theta(s)$$

es constante. Éste es un caso particular de una propiedad general de las superficies de revolución llamada **relación de Clairaut**.

6. Dada la esfera $\mathbb{S}^2_R$ de radio R con centro en $(0,0,0)$ con coordenadas espaciales x^1, x^2, x^3, considere las seis cartas en la esfera $\{(U_i^{\pm}, \psi_i^{\pm})\}$, $i = 1, 2, 3$, dadas por las regiones

$$U_i^+ = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{S}^2_R \,:\, x^i > 0\},$$

$$U_i^- = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{S}^2_R \,:\, x^i < 0\},$$

y por las proyecciones canónicas

$$\psi_i^+ : U_i^+ \to V_i,$$

$$\psi_i^- : U_i^- \to V_i,$$

de cada $U_i^{\pm}$ en V_i, el disco de radio R en el plano cuyas coordenadas no incluyen a la coordenada x^i. Cada $\psi_i^{\pm}$ está dada por $\psi_i^{\pm}(x^1, x^2, x^3) = (x^{i-1}, x^{i+i})$, omitiendo la mencionada coordenada (véase el ejemplo 2.18).

Demuestre que $\{(U_i^{\pm}, \psi_i^{\pm})\}$ provee de un atlas diferenciable a $\mathbb{S}^2_R$ y que le hace una superficie diferenciable.

7. Halle las ecuaciones del plano tangente y la recta normal a la superficie S en el punto dado.

(a) El paraboloide hiperbólico dado por

$$\varphi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2),$$

en el punto $(u, v) = (1, 1)$,

(b) El helicoide dado por

$$(v\cos u, v\operatorname{sen} u, u),$$

en el punto $(u,v)=(\pi/2,1)$.

(c) La superficie de Enneper, dada por

$$\varphi(u,v)=\left(u-\frac{u^3}{3}+uv^2,\ v-\frac{v^3}{3}+vu^2, u^2-v^2\right),$$

en el punto $(u,v)=(-1,1)$.

(d) El elipsoide $F^{-1}(0)$, donde

$$F(x,y,z)=3x^2+6y^2+3z-12,$$

en el punto $(1,1,1)$.

(e) El hiperboloide $F^{-1}(0)$, donde

$$F(x,y,z)=x^2-y^2-z^2+1,$$

en el punto $(1,1,1)$.

8. (a) Demuestre que si la superficie S es la gráfica de una función $z=f(x,y)$, entonces los coeficientes de la primera forma fundamental toman la forma

$$E=1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2,\ F=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ y } G=1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

Demuestre que en un punto crítico la primera forma fundamental es euclidiana.

(b) Demuestre que si la superficie S está definida como una superficie de nivel dada como la imagen inversa de un valor regular $F^{-1}(0)$, entonces los coeficientes de la primera forma fundamental se pueden expresar como

$$E=1+\frac{F_x^2}{F_z^2},\quad F=\frac{F_xF_y}{F_z^2},\quad G=1+\frac{F_y^2}{F_z^2}$$

donde $F_x=\frac{\partial F}{\partial x}, F_y=\frac{\partial F}{\partial y}$ y suponemos que $F_z=\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$.

9. Calcule los coeficientes de la primera forma fundamental para cada una de las superficies del ejercicio 2 de esta sección.

10. Sean (ϕ, θ) las coordenadas co–geográficas de la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$. Si $\gamma(t) = (\phi(t), \theta(t))$ es la curva en $\mathbb{S}^2$ dada por

$$\phi(t) = \ln \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right), \quad \theta(t) = \frac{\pi}{2} - t, \quad t \in [0, \pi/2].$$

    (a) Calcule la longitud de la curva $\gamma(t)$.
    (b) Demuestre que la curva corta a cada paralelo en un ángulo constante, calculando el ángulo entre $\dot{\gamma}(t)$ y φ_ϕ.

11. Sea S una superficie cuyos coeficientes de la primera forma fundamental con respecto de una parametrización $\varphi(u, v)$ son

$$E(u, v) = 1, \quad F = 0, \quad G(u, v) = \operatorname{senh}^2 u,$$

con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Calcule la longitud de arco de la curva dada por la ecuación $u = v$, desde $u = u_0$ hasta $u = u_1$.

12. Dada una superficie de revolución S, una curva que corta los meridianos formando un ángulo constante se llama **curva loxodrómica**. Halle la ecuación de las curvas loxodrómicas de una esfera de radio R.

13. Calcule el área del cilindro $x^2 + y^2 = 4, \quad 0 \leq z \leq 3$.

14. Una superficie en $\mathbb{R}^3$ es compacta si es un conjunto cerrado y acotado. ¿Cuáles de las siguientes superficies son compactas?

    (a) $x^2 + y^2 z^2 = 1$.
    (b) $x^2 + y^4 + z^4 = 1$.
    (c) $x^2 - y^4 + z^6 = 1$.
    (d) $x^2 - 3x + y^2 + z^4 = 1$.

15. Determine una isometría entre el plano y el cono del ejercicio 1.

16. Considere la parametrización del toro de dimensión dos dada por las ecuaciones (2.21). Demuestre que esta transformación no es una isometría, mostrando que no preserva la longitud de las curvas.

17. Demuestre que el conjunto de isometrías de una superficie diferenciable es un grupo bajo la composición.

18. (a) Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una isometría y $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie diferenciable tal que $f(S) \subset S$, demuestre que la restricción $f : S \to S$ es una isometría.
    (b) Demuestre que el grupo de isometrías de la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ está contenido en el grupo ortogonal $O(3)$.
    (c) Demuestre que toda rotación a lo largo del eje de una superficie de revolución S es una isometría de S.

19. Un difeomorfismo $f : S \to S$ preserva el área si y sólo si para toda región $R \subset S$ se cumple que el área de R es igual al área de su imagen. Demuestre que un difeomorfismo conforme que preserva área es una isometría.

20. La definición 2.4 se puede extender a conjuntos que sean subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. En este ejercicio daremos un ejemplo y la idea de cómo se realiza esta extensión.

    Consideremos la siguiente relación entre puntos de la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$: $p \sim q$ si y sólo si $p = q$ o $p = -q$. Es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia bajo $\sim$ forman un conjunto llamado el **plano proyectivo real**, denotado por $\mathbb{R}P^2$. Sea $\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}P^2$ la transformación que a cada $p \in \mathbb{S}^2$ le asocia su clase de equivalencia.

    Demuestre primero que cada $p \in \mathbb{S}^2$ posee una vecindad U tal que $\pi|_U : U \to \pi(U)$ es biyectiva. Luego, sean $\varphi_i : \Omega_i \to U$, $i = 1, 2$, dos parametrizaciones de tal vecindad U. Muestre que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \Omega_1 \to \Omega_2$ es diferenciable. (Así, las transformaciones $\pi \circ \varphi_i$ de este tipo se pueden considerar como *parametrizaciones* de $\pi(U)$.)

21. Una generalización del lema 2.12 nos dirá que: *Si $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor regular en el sentido que todo $p \in F^{-1}(\lambda)$ tiene un gradiente no nulo, entonces $F^{-1}(\lambda)$ es una superficie diferenciable en $\mathbb{R}^N$ de dimensión $N - 1$.*

    Utilice este resultado para demostrar que $SL(n, \mathbb{R})$ es una superficie contenida en $GL(n, \mathbb{R})$ y que tiene dimensión $n^2 - 1$.

CAPÍTULO 3

Curvatura de una superficie

En este capítulo iniciamos el estudio de la geometría intrínseca de una superficie mediante su característica geométrica fundamental: la **curvatura**. Definiremos la curvatura de una superficie en cada punto a través de dos invariantes, la primera forma fundamental (definida en el capítulo anterior) y la segunda forma fundamental, las cuales nos darán toda la información sobre el comportamiento geométrico de la superficie en una vecindad del punto dado. Más adelante probaremos que en realidad la curvatura depende sólo de la primera forma fundamental.

3.1 Curvatura para gráficas de funciones

Para comenzar, analizaremos el caso particular de una superficie vista como la gráfica de una función f con valores reales. Es decir,

$$S = \{ (x, y, z) \,|\, z = f(x, y) \},$$

donde f está definida en una vecindad de un punto (x_0, y_0). Supondremos además que (x_0, y_0) es un **punto crítico** de f; es decir, que el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ se anula. Desde un punto de vista geométrico, esto implica que el plano tangente al punto (x_0, y_0, z_0), donde $z_0 = f(x_0, y_0)$, es paralelo al plano horizontal (x, y).

En este contexto, utilizaremos los conceptos y resultados del cálculo diferencial en varias variables para analizar el comportamiento de la superficie S en una vecindad del punto crítico de f. Si calculamos las segundas

derivadas parciales de la función f y escribimos el elemento diferencial de segundo orden

$$df^2 = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2,$$

podemos recordar que tal expresión tiene asociada la **matriz hessiana**

$$B = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)} \tag{3.1}$$

evaluada en el punto (x_0, y_0). Como esta matriz es simétrica $(f_{yx} = f_{xy})$, un resultado estándar del álgebra lineal implica que sus valores propios son reales. (Véase, por ejemplo, [7], p. 265.)

Recordemos que un punto crítico es **no degenerado** si y sólo si la matriz hessiana es invertible. En este caso, el cálculo diferencial (véase [2] o bien [8]) nos garantiza que el comportamiento de f en una vecindad de (x_0, y_0) queda determinado por los valores propios λ_1 y λ_2 de la matriz hessiana, de la manera siguiente:

a. Si ambos valores propios son positivos, entonces $z_0 = f(x_0, y_0)$ es un **mínimo local** de la función f.

b. Si ambos valores propios son negativos, entonces $z_0 = f(x_0, y_0)$ es un **máximo local**.

c. Si los valores propios tienen signos opuestos, $z_0 = f(x_0, y_0)$ corresponde a un punto **silla**.

La figura 3.1 ilustra estos casos. Esto sugiere el uso de la matriz hessiana de f para definir la **curvatura** de S en el punto crítico.

Definición 3.1. Los valores propios λ_1 y λ_2 de la matriz hessiana de f en un punto crítico (x_0, y_0) se llaman las **curvaturas principales** de S en el punto (x_0, y_0, z_0). El producto de λ_1 y λ_2 se llamará la **curvatura gaussiana** de S en (x_0, y_0, z_0), la que será denotada por

$$K(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1\lambda_2.$$

El promedio de los valores propios se llama la **curvatura media** de S en (x_0, y_0, z_0), y será denotada por

$$H(x_0, y_0, z_0) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}.$$

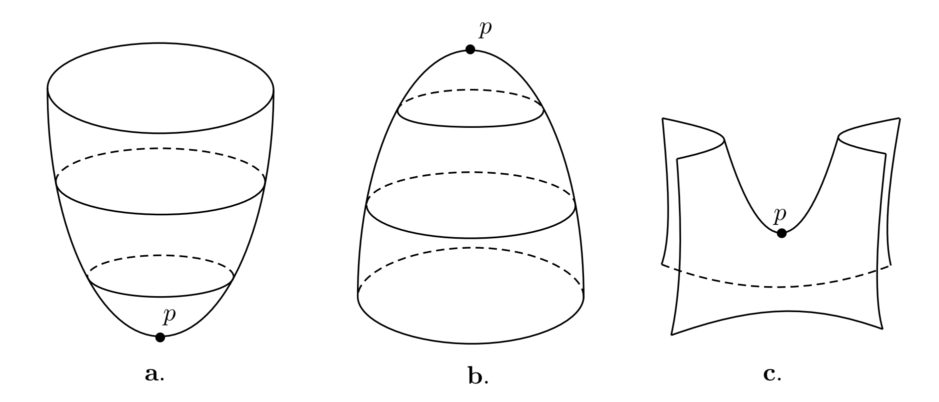


Figura 3.1: Comportamiento de una función diferenciable alrededor de un punto crítico.

En el caso de un punto crítico no degenerado, tenemos los casos siguientes:

a. Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, entonces la superficie S tiene curvatura gaussiana positiva

$$K(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \lambda_2 > 0$$

en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ tal que $z_0 = f(x_0, y_0)$. Diremos que (x_0, y_0, z_0) es un **punto elíptico**.

b. Si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, la curvatura gaussiana también es positiva

$$K(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \lambda_2 > 0$$

en el punto (x_0, y_0, z_0). Diremos también que (x_0, y_0, z_0) es un punto elíptico.

c. Si λ_1 y λ_2 tienen signos contrarios, la curvatura gaussiana en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ es negativa:

$$K(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \lambda_2 < 0.$$

El punto se llamará **punto hiperbólico**.

Si $\det B = \lambda_1\lambda_2 = 0$, diremos que el punto (x_0, y_0) es un punto crítico **degenerado** de la función f y tendremos los siguientes casos:

d. Si alguno de los valores propios no se anula, $\lambda_1 \neq 0$ o $\lambda_2 \neq 0$, el punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ recibirá el nombre de **punto parabólico**.

e. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, el punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ se llamará **punto plano**.

La figura 3.2 ilustra estas denominaciones.

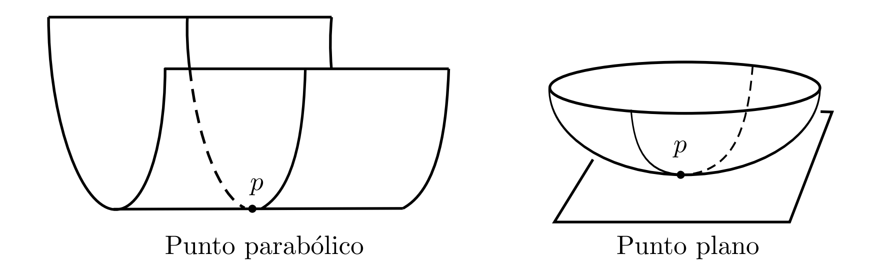


Figura 3.2: Puntos parabólicos y planos.

Observación. El análisis anterior muestra que el comportamiento local de la superficie en una vecindad del punto (x_0, y_0, z_0) queda determinado por la forma cuadrática

$$z = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2,$$

donde λ_1, λ_2 son los valores propios de la matriz hessiana. Recordamos que tales valores propios resuelven la ecuación

$$0 = \det(B - \lambda I);$$

aquí, B es la matriz hessiana e I es la matriz identidad. Podemos interpretar a I como la matriz asociada a la primera forma fundamental en el plano tangente a S en (x_0, y_0, z_0) (véase la sección 1.5), de modo que λ_1 y λ_2 están asociados a la pareja (I, B). Esta idea será usada más adelante para generalizar el concepto de curvatura gaussiana de una superficie arbitraria en $\mathbb{R}^3$.

3.2 Orientación

Damos en esta sección la definición de una superficie diferenciable orientada. Conviene revisar la sección 0.2, donde analizamos estos conceptos para los casos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Veamos primero qué ocurre localmente. Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable, p un punto en S y $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de una vecindad U de p en S. Podemos orientar a cada plano tangente T_qS, $q \in U$, eligiendo la base $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ inducida por la parametrización.

Desde un punto de vista intuitivo, lo anterior quiere decir que en el conjunto U podemos colocar un reloj y moverlo a lo largo de una curva cerrada arbitraria, logrando regresar siempre a su posición original. (Véase la figura 3.3.) Una superficie será globalmente orientable si podemos cubrirla mediante una familia de abiertos con la propiedad anterior.

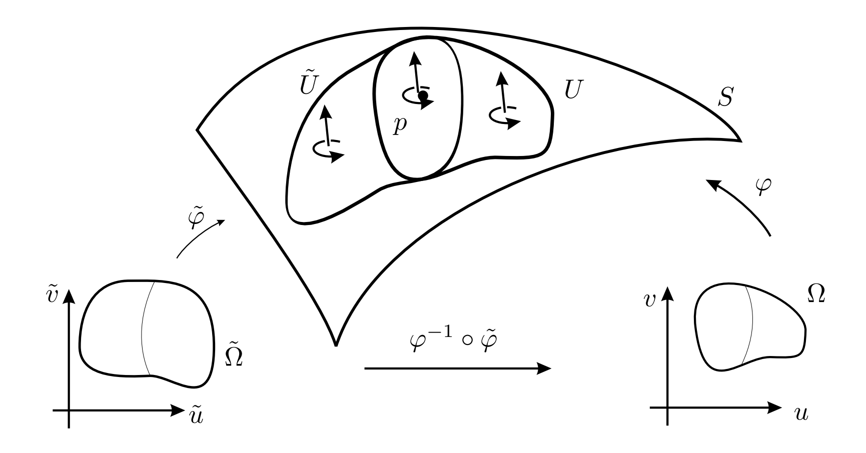


Figura 3.3: Orientación en una vecindad de un punto.

Para describir esto en forma analítica, consideremos dos parametrizaciones alrededor de un punto arbitrario.

Si $\varphi : \Omega \to S$ es una parametrización de S alrededor del punto p con coordenadas (u, v) y $\widetilde{\varphi} : \widetilde{\Omega} \to S$ es otra parametrización con coordenadas

$(\tilde{u},\tilde{v})$, entonces el plano tangente T_pS está generado en forma simultánea por las bases

$$\{\varphi_u,\varphi_v\} \quad \text{y} \quad \{\widetilde{\varphi}_{\tilde{u}},\widetilde{\varphi}_{\tilde{v}}\}.$$

Si consideramos el cambio de coordenadas $\varphi^{-1}\circ\widetilde{\varphi}:\widetilde{\Omega}\to\Omega$, de modo que $(u,v)=(u(\tilde{u},\tilde{v}),v(\tilde{u},\tilde{v}))$, estas bases están relacionadas de la manera siguiente:

$$\widetilde{\varphi}_{\tilde{u}}=\varphi_u\frac{\partial u}{\partial\tilde{u}}+\varphi_v\frac{\partial v}{\partial\tilde{u}},$$
$$\widetilde{\varphi}_{\tilde{v}}=\varphi_u\frac{\partial u}{\partial\tilde{v}}+\varphi_v\frac{\partial v}{\partial\tilde{v}},$$

o en forma matricial,

$$\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}_{\tilde{u}}\\ \widetilde{\varphi}_{\tilde{v}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial\tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial\tilde{u}}\\ \frac{\partial u}{\partial\tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial\tilde{v}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_u\\ \varphi_v\end{pmatrix}.$$

Así, si el jacobiano del cambio de coordenadas

$$\frac{D(u,v)}{D(\tilde{u},\tilde{v})}=\begin{vmatrix}u_{\tilde{u}} & u_{\tilde{v}}\\ v_{\tilde{u}} & v_{\tilde{v}}\end{vmatrix}$$

es positivo, entonces la diferencial del cambio de coordenadas preserva la orientación de T_pS.

Definición 3.2. Una superficie diferenciable $S\subset\mathbb{R}^3$ es **orientable** si y sólo si existe una familia de parametrizaciones $\{(U_i,\varphi_i)\}$ que cubre a S y tal que si $U_i\cap U_j\neq\varnothing$, entonces el cambio de coordenadas $\varphi_i^{-1}\circ\varphi_j$ tiene jacobiano positivo. La familia $\{(U_i,\varphi_i)\}$ se llamará una **orientación** para S. Si una superficie diferenciable $S\subset\mathbb{R}^3$ no tiene esta propiedad, se llamará **no orientable**.

Como ejemplo de una superficie orientable se tiene a L^2 la hoja superior del hiperboloide, que puede parametrizarse como la gráfica de la función

$$z=f(x,y)=\sqrt{R^2+x^2+y^2},\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2, R\neq 0.$$

En general, toda superficie $S\subset\mathbb{R}^3$ que pueda definirse globalmente como la imagen de una sola parametrización $\varphi:\Omega\to S$ es orientable. Para el caso en que la superficie $S\subset\mathbb{R}^3$ se pueda cubrir con sólo dos parametrizaciones, se tiene el siguiente resultado.

Lema 3.3. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable que puede ser cubierta con sólo dos parametrizaciones (U, φ) y $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$. Si $U \cap \widetilde{U} \subset S$ es un conjunto conexo, entonces S es orientable.*

Demostración. Sean (u, v) las coordenadas dadas por (U, φ) y $(\tilde{u}, \tilde{v})$ las dadas por $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$. Para todo punto $p \in W = U \cap \widetilde{U}$ el cambio de coordenadas $(\tilde{u}, \tilde{v}) \mapsto (u, v)$ satisface que

$$\frac{D(u, v)}{D(\tilde{u}, \tilde{v})}(p) \neq 0.$$

Como W es conexo se tiene que

$$\frac{D(u, v)}{D(\tilde{u}, \tilde{v})} > 0 \quad \text{ó} \quad \frac{D(u, v)}{D(\tilde{u}, \tilde{v})} < 0.$$

Para el primer caso se cumple la afirmación del lema. Para el otro caso, un cambio lineal de coordenadas $u \longleftrightarrow v$ hará que el determinante del nuevo cambio de coordenadas sea positivo en todo W. □

Observamos que el recíproco del lema no se cumple, ya que el cilindro circular recto es orientable y se puede cubrir con dos cartas cuyo intersección no es conexa. (Véase la figura 3.4a y el ejemplo 10 del Capítulo 0.)

Ejemplo 3.4. *Sea $\mathbb{S}^2_R \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de radio R con centro en el origen de coordenadas. Al tomar las parametrizaciones de $\mathbb{S}^2_R$ generadas por las proyecciones estereográficas desde los polos norte y sur, se cubre a la esfera. Como la intersección de las imágenes es la esfera menos los polos, que es un conjunto conexo, se sigue que $\mathbb{S}^2_R$ es orientable. (Véase la figura 3.4b.)*
$\triangleright$

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y (U, φ) una parametrización de una vecindad de $p \in S$, con coordenadas (u, v). Entonces el espacio tangente T_pS está generado por los vectores $\{\varphi_u, \varphi_v\}$. Podemos escoger un vector unitario, normal a este plano tangente, definido por

$$N(p) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}.$$

Obsérvese que $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ con orientación positiva.

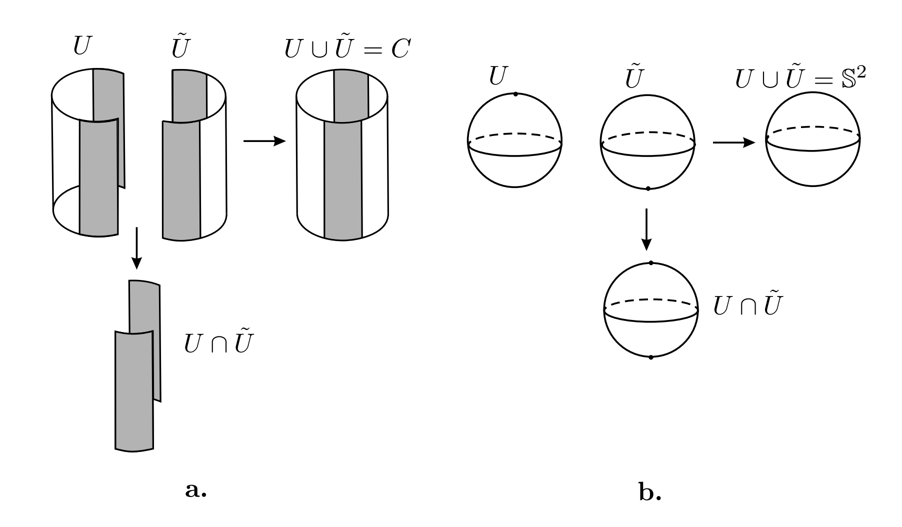


Figura 3.4: Superficies orientables.

Definición 3.5. Sea $V \subset S$ una región contenida en la superficie diferenciable S. La transformación

$$N : V \to \mathbb{S}^2$$

que a cada $p \in V$ le asocia un vector unitario $N(p)$ normal a T_pS, contenido en la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$, se llama la **aplicación de Gauss** asociada a la región $V \subset S$.

Si se escoge otra parametrización $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{v})$, bajo el cambio de coordenadas se tiene que

$$\widetilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \widetilde{\varphi}_{\tilde{v}} = \left(\varphi_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right) \times \left(\varphi_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}\right) = \varphi_u \times \varphi_v \frac{D(u,v)}{D(\tilde{u},\tilde{v})},$$

lo que implica que los normales correspondientes en el punto p se relacionan por la fórmula

$$\widetilde{N}(p) = \frac{\widetilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \widetilde{\varphi}_{\tilde{v}}}{\|\widetilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \widetilde{\varphi}_{\tilde{v}}\|} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \operatorname{signo}\left(\frac{D(u,v)}{D(\tilde{u},\tilde{v})}\right) = \pm N(p). \tag{3.2}$$

En una superficie orientable se tienen cambios de coordenadas con jacobianos positivos. Estos cambios no afectan la definición de un vector normal n. Por lo tanto, $\widetilde{N}(p) = N(p)$.

El siguiente teorema provee de una gran cantidad de ejemplos de superficies diferenciables que admiten una orientación.

Teorema 3.6. *Una superficie diferenciable $S \subset \mathbb{R}^3$ es orientable si y sólo si la aplicación de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$ es diferenciable y está definida en toda la superficie S.*

Demostración. Demostramos primero la suficiencia. Supongamos que la aplicación de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$ es diferenciable y está definida en S. Considérese una familia de parametrizaciones $\{(U_i, \varphi_i)\}$ que cubra a S y sea $\varphi : \Omega \to U$ un elemento de esta familia. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que Ω es conexo y que para todo punto $p \in \Omega$,

$$N(p) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(p),$$

pues N es continua en el conjunto conexo Ω. (En caso contrario, hacemos un cambio de coordenadas $u \longleftrightarrow v$.)

Hacemos esto para cada parametrización en la familia original. Si $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ es otro elemento de la familia con $U \cap \widetilde{U} \neq \emptyset$, entonces $\widetilde{N} = N$. Esto implica que

$$\text{signo}\left(\frac{D(u,v)}{D(\tilde{u},\tilde{v})}\right) = 1,$$

lo que nos dice que el jacobiano del cambio de cordenadas es positivo. En virtud de que esto ocurre para cada par de parametrizaciones en la familia original, se sigue que la superficie S es orientable.

La prueba de la parte necesaria se realiza al tomar la aplicación de Gauss

$$N(p) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(p)$$

y dado un cambio de coordenadas $(u, v) \longleftrightarrow (\tilde{u}, \tilde{v})$, considerar de nuevo la relación

$$\widetilde{N}(p) = \text{signo}\left(\frac{D(u,v)}{D(\tilde{u},\tilde{v})}\right) N(p).$$

Si la superficie es orientable, entonces $D(u,v)/D(\tilde{u},\tilde{v}) > 0$ y por lo tanto $\widetilde{N}(p) = N(p)$. Esto muestra que N se puede definir de manera global. Como N está definida localmente por funciones diferenciables, la aplicación de Gauss es también diferenciable. □

Ejemplo 3.7. *Damos otra prueba de que la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ es orientable.*

Ya que $\mathbb{S}^2 = F^{-1}(1)$, donde $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, defínase el campo normal

$$N(p) = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{2(x,y,z)}{2\|(x,y,z)\|} = \frac{p}{\|p\|} = p.$$

Es claro que $N : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ es la identidad, está definida en todo $\mathbb{S}^2$ y es diferenciable. Esto hace de $\mathbb{S}^2$ una superficie orientable. ▷

El ejemplo anterior se generaliza para superficies diferenciables que son imagen inversa de valores regulares de funciones diferenciables.

Lema 3.8. *Si S es una superficie diferenciable de la forma $S = F^{-1}(\lambda)$ donde $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable y λ es un valor regular, entonces S es orientable.*

Demostración. Ya que λ es un valor regular, entonces para cada $p \in S$ se tiene que el vector gradiente ∇F_p no se anula.

Definamos entonces la aplicación de Gauss de S mediante

$$N(p) = \frac{\nabla F_p}{\|\nabla F_p\|};$$

por el teorema 3.6, S es una superficie orientable. □

Con la notación del lema, la aplicación de Gauss se escribe en coordenadas como

$$N(p) = \frac{1}{\sqrt{F_x^2(p) + F_y^2(p) + F_z^2(p)}}(F_x(p),\, F_y(p),\, F_z(p)),$$

donde F_x, F_y, F_z denotan a las derivadas parciales de la función F.

Ahora mostramos que existen superficies diferenciables contenidas en $\mathbb{R}^3$ que no son orientables. Aunque el ejemplo de superficie dado se define como un espacio de identificación, se menciona la idea de su no orientabilidad. En la lista de ejercicios del capítulo se propone la prueba pertinente.

Ejemplo 3.9. *Consideremos a la superficie* M^2 *que se obtiene del rectángulo*

$$\bar{\Omega} = \{\ (\phi, t) \mid \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad -1 < t < 1\}$$

en el plano, identificando (pegando) los puntos $(0, t)$ *con* $(2\pi, -t)$ *como lo muestra la figura 3.5.*

Desde un punto de vista intuitivo, M^2 *se obtiene de pegar las orillas de la banda* $\bar{\Omega}$ *torciendo una vez este conjunto.*

La superficie obtenida M^2 *se llama la* **banda de Möbius***; ahora veremos que esta superficie no es orientable.*

Tomemos la circunferencia central Γ *en* M^2 *dada por los puntos con coordenadas* $(\phi, 0)$ *y un punto* $p \in \Gamma$*.*

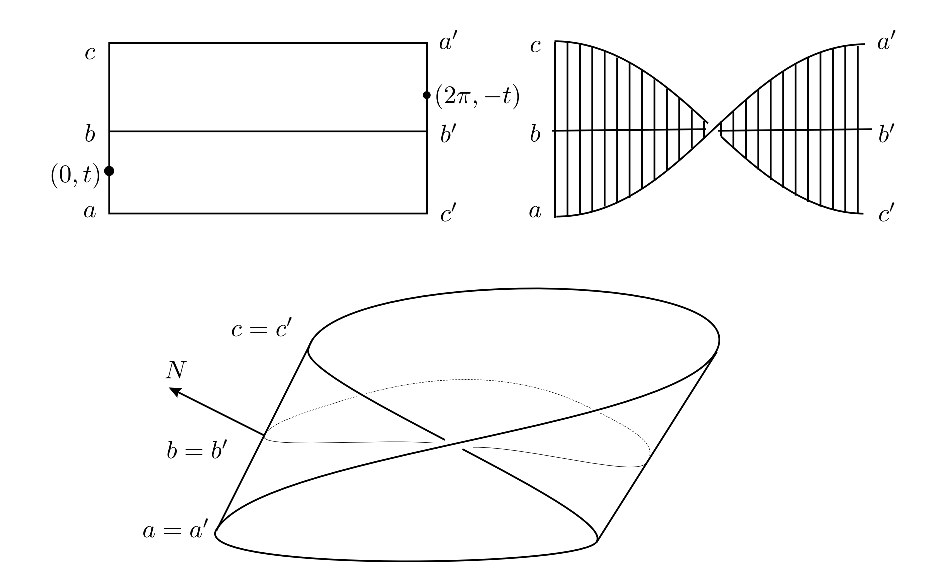


Figura 3.5: Banda de Möbius.

Supongamos que para cada p *tenemos un vector* $N(p)$ *normal a* S *en* p *y que deslizamos éste a lo largo de* Γ*, esto es, construimos un campo normal en* Γ *iniciando en* $N(p)$*. Es fácil darse cuenta que cuando se cierra el circuito* Γ *el vector normal de retorno a* p *es* $-N(p)$*. De esta forma, no es posible definir en todo* M^2 *un campo diferenciable* N *que no se anule.*

(De hecho, ni siquiera puede ser continuo.) ▷

3.3 La segunda forma fundamental

Sea S una superficie parametrizada regular orientable en $\mathbb{R}^3$ y $\varphi : \Omega \to U$ una parametrización de una vecindad U de $p = \varphi(q)$ en S, con coordenadas (u, v). Recordemos que el vector $(\varphi_u \times \varphi_v)(q)$ es normal a la superficie en el punto $p \in S$.

Ya que S es orientable, tenemos que

$$N(p) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{||\varphi_u \times \varphi_v||}(q)$$

es un vector unitario en p, normal al plano tangente T_pS.

Considérese una curva diferenciable en S que pase por p. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la curva tiene la forma $\varphi(t) = \varphi(u(t), v(t))$. Entonces

$$\dot{\varphi}(t) = \varphi_u \dot{u}(t) + \varphi_v \dot{v}(t).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}(t) &= \varphi_{uu}\dot{u}(t)^2 + \varphi_{uv}\dot{u}(t)\dot{v}(t) + \varphi_u\ddot{u}(t) \\ &\qquad + \varphi_{vu}\dot{u}(t)\dot{v}(t) + \varphi_{vv}\dot{v}(t)^2 + \varphi_v\ddot{v}(t) \\ &= \varphi_{uu}\dot{u}(t)^2 + 2\varphi_{uv}\dot{u}(t)\dot{v}(t) + \varphi_{vv}\dot{v}(t)^2 + \varphi_u\ddot{u}(t) + \varphi_v\ddot{v}(t).\end{aligned}$$

Recordemos que la curvatura de una curva es una medida de cuánto se aparta la curva de su recta tangente. Para el caso de las superficies podemos establecer una situación análoga: Para ver cuánto se aparta una superficie de su plano tangente, es necesario analizar la variación de sus vectores tangentes $\dot{\varphi}(t)$. Esto puede hacerse calculando la derivada $\ddot{\varphi}(t)$ y midiendo su proyección $\langle \ddot{\varphi}(t), N \rangle$ en el correspondiente vector normal N. En otras palabras, el normal N nos servirá como referencia para medir las variaciones de los vectores tangentes. Tal proyección se calcula mediante

$$\begin{aligned}\langle \ddot{\varphi}, N \rangle &= \langle \varphi_{uu}\dot{u}(t)^2 + 2\varphi_{uv}\dot{u}(t)\dot{v}(t) + \varphi_{vv}\dot{v}(t)^2 + \varphi_u\ddot{u}(t) + \varphi_v\ddot{v}(t), N \rangle \\ &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle \dot{u}(t)^2 + 2\langle \varphi_{uv}, N \rangle \dot{u}(t)\dot{v}(t) + \langle \varphi_{vv}, N \rangle \dot{v}(t)^2 \\ &\quad + \langle \varphi_u, N \rangle \ddot{u}(t) + \langle \varphi_v, N \rangle \ddot{v}(t).\end{aligned}$$

En virtud de que los vectores φ_u y φ_v son ortogonales a N, entonces se sigue que

$$\begin{aligned}\langle \ddot{\varphi}, N\rangle &= \langle \varphi_{uu}, N\rangle \dot{u}(t)^2 + 2\langle \varphi_{uv}, N\rangle \dot{v}(t)\dot{u}(t) + \langle \varphi_{vv}, N\rangle \dot{v}(t)^2 \\ &= e\dot{u}(t)^2 + 2f\dot{u}(t)\dot{v}(t) + g\dot{v}(t)^2,\end{aligned}$$

donde se han definido las cantidades

$$\begin{aligned} e &= \langle \varphi_{uu}, N\rangle, \\ f &= \langle \varphi_{uv}, N\rangle = \langle \varphi_{vu}, N\rangle, \\ g &= \langle \varphi_{vv}, N\rangle. \end{aligned}$$

Podemos ver entonces a la proyección de $\ddot{\varphi}(t)$ en el vector N como una forma cuadrática definida en cada punto de la región parametrizada por φ en la superficie diferenciable S. Esto es, en cada punto tenemos una matriz simétrica

$$B = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

y definimos una forma que aplicada en un vector tangente $\dot{r}(0) = \xi$ satisface

$$\xi^T B \xi = \langle \xi, \xi\rangle_B.$$

Definición 3.10. La forma cuadrática $\langle \ , \ \rangle_B$ definida por la matriz (3.3) se llama la **segunda forma fundamental** de la superficie S en el punto p.

Observación. Como en el caso de la primera forma, hemos utilizado los símbolos clásicos para los coeficientes de la segunda forma fundamental. En el caso de las extensiones de este concepto a ambientes con dimensión mayor, se acostumbra denotar a la matriz de la segunda forma por (b_{ij}).

Ejemplo 3.11. *Calcularemos la segunda forma fundamental para la esfera $\mathbb{S}^2_R$, parametrizada por las coordenadas co-geográficas*

$$\varphi(\phi, \theta) = (R\cos\phi \operatorname{sen}\theta, R\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta,\ R\cos\theta).$$

Los vectores básicos en el punto (ϕ, θ) son

$$\begin{aligned} \varphi_\phi &= (-R\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, R\cos\phi\operatorname{sen}\theta, 0), \\ \varphi_\theta &= (R\cos\phi\ \cos\theta,\ R\operatorname{sen}\phi\cos\theta, -R\operatorname{sen}\theta). \end{aligned}$$

Un cálculo directo prueba que

$$\varphi_\phi \times \varphi_\theta = (-R^2 \cos\phi \operatorname{sen}^2\theta,\ -R^2 \operatorname{sen}\phi\ \operatorname{sen}^2\theta,\ -R^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta)$$

con lo que

$$\|\varphi_\phi \times \varphi_\theta\| = R^2 \operatorname{sen}\theta.$$

El vector normal unitario N es

$$N = -(\cos\phi \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta,\ \cos\theta).$$

Al calcular las segundas derivadas de φ obtenemos

$$\begin{aligned}
\varphi_{\phi\phi} &= (-R\cos\phi\operatorname{sen}\theta,\ -R\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, 0)\\
\varphi_{\theta\phi} &= (-R\operatorname{sen}\phi\cos\theta, R\cos\phi\cos\theta, 0)\\
\varphi_{\theta\theta} &= (-R\cos\phi\operatorname{sen}\theta, -R\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, -R\cos\theta)
\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}
e &= \langle\varphi_{\phi\phi}, N\rangle = R\operatorname{sen}^2\theta,\\
f &= \langle\varphi_{\theta\phi}, N\rangle = 0,\\
g &= \langle\varphi_{\theta\theta}, N\rangle = R,
\end{aligned}$$

son los coeficientes de la segunda forma fundamental. ▷

Ejemplo 3.12. *Considérese el cilindro circular recto $C \subset \mathbb{R}^3$ de radio R parametrizado por*

$$\varphi(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$$

donde $(u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$. Procedemos a calcular su segunda forma fundamental en estas coordenadas.

Es claro que

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0),\\
\varphi_v &= (0, 0, 1),
\end{aligned}$$

lo que implica que

$$N = \varphi_u \times \varphi_v = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0).$$

Al calcular las segundas derivadas de φ se obtiene

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= (-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0), \\ \varphi_{uv} &= (0, 0, 0), \\ \varphi_{vv} &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} e &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle = -1, \\ f &= \langle \varphi_{vv}, N \rangle = 0, \\ g &= \langle \varphi_{vv}, N \rangle = 0, \end{aligned}$$

son los coeficientes de la segunda forma fundamental para C. ▷

3.4 Curvatura: El caso general

A continuación relacionamos las formas fundamentales de una superficie con el concepto de curvatura. Utilizaremos para ello la metodología de las curvaturas normales debida a L. Euler.

Consideremos una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ y un punto $p \in S$. Sea φ una curva que pasa por p y que se obtiene al cortar a la superficie S con un plano P que contiene al normal $N(p)$ a S en p. Diremos entonces que la curva es una **sección normal** a S en p. (Véase la figura 3.6.)

Localmente, si $\varphi : \Omega \to S$ es una parametrización de S alrededor de p con coordenadas (u, v), la curva se puede escribir como $\varphi(t) = \varphi(u(t), v(t))$, de modo que su vector tangente es $\dot{u}\varphi_u + \dot{v}\varphi_v$. Además, podemos suponer que t es el parámetro de longitud de arco.

Teorema 3.13 (de Euler)**.** *Sean p un punto de una superficie S y $\varphi(t) = \varphi(u(t), v(t))$ una sección normal a S en p, parametrizada por longitud de arco t. Salvo el signo, la curvatura k de esta curva coincide con la segunda forma fundamental aplicada al vector tangente $\dot{u}\varphi_u + \dot{v}\varphi_v$. Es decir,*

$$k = \pm \left(e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2 \right).$$

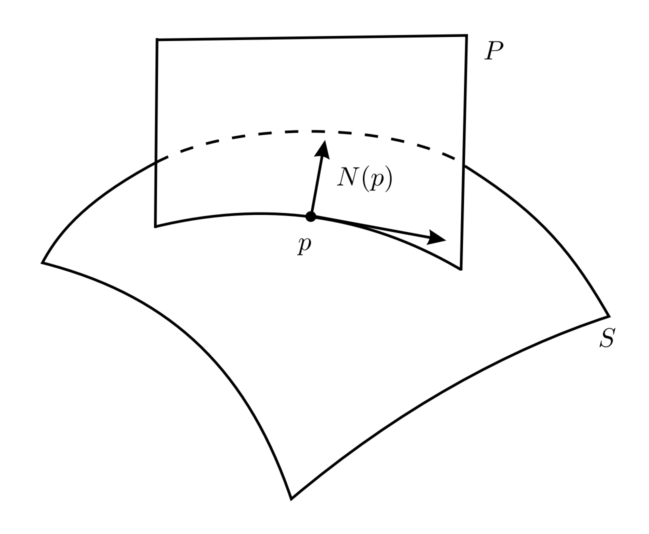


Figura 3.6: Sección normal.

Demostración. De la primera fórmula de Serret-Frenet aplicada a $\varphi(t)$ se tiene que

$$\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = kn,$$

donde n es el normal principal a la curva $\varphi(t)$. Por otro lado,

$$\ddot{\varphi} = \dot{u}(\dot{u}\varphi_{uu} + \dot{v}\varphi_{vu}) + \dot{v}(\dot{u}\varphi_{uv} + \dot{v}\varphi_{vv}),$$

de modo que al hacer el producto con el vector N normal a la superficie se tiene que

$$\begin{aligned} k\langle n, N\rangle &= k\|n\|\,\|N\|\cos\theta = \langle\varphi_{uu}, N\rangle\dot{u}^2 + 2\langle\varphi_{uv}, N\rangle\dot{u}\dot{v} + \langle\varphi_{vv}, N\rangle\dot{v}^2 \\ &= e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2, \end{aligned}$$

donde θ es el ángulo formado por los vectores n y N. Como una sección normal $\varphi(t)$ está contenida en un plano normal P, el normal principal n tiene la misma dirección de N. Esto es, el ángulo formado por n y N tiene posibles valores $\theta = 0, \pi$, de donde $\cos\theta = \pm 1$. Esto termina la demostración del teorema. □

La demostración del teorema 3.13 motiva la siguiente definición.

Definición 3.14. Sean p un punto de S y $\varphi(t)$ una curva regular en S (con el parámetro de longitud de arco t) que pasa por el punto p. Sea k la curvatura de $\varphi(t)$ en p. Si θ es el ángulo formado entre el normal $N(p)$ a la superficie S y el normal principal $n(p)$ a la curva en p, el valor $k_n(p) = k(p)\cos\theta$ es la **curvatura normal** de $\varphi(t)$ en p.

Dada cualquier curva $\varphi(t)$ en S pasando por $p = \varphi(0)$, tenemos que la proyección de $\ddot{\varphi}(0)$ en el normal $N(p)$ nos da la segunda forma fundamental aplicada en el tangente $\dot{\varphi}(0)$. Tal forma fundamental no depende de la curva que pase por p, sino sólo del vector tangente, de modo que la demostración del teorema 3.13 implica el siguiente resultado.

Corolario 3.15 (Teorema de Meusnier)**.** *Todas las curvas en S que pasan por un punto p con la misma dirección tangente tienen la misma curvatura.*

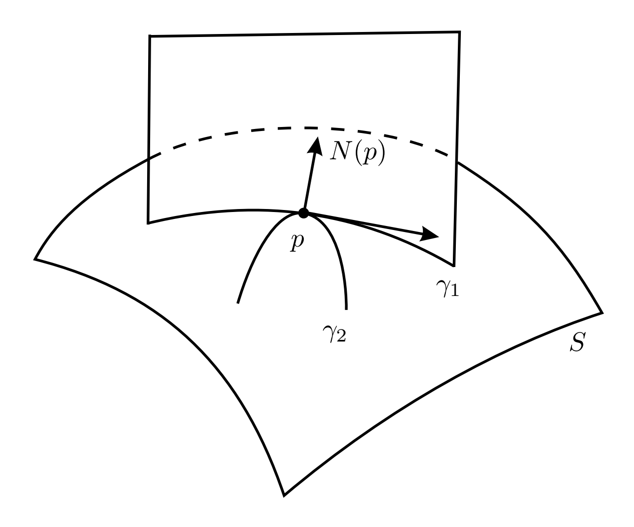


Figura 3.7: Teorema de Meusnier.

Observación. Debido a este resultado, podemos modificar la definición de la curvatura normal asociándola ahora al vector tangente, y no a la curva en

cuestión. Denotaremos por $k_n(v)$ a la curvatura normal de *cualquier* curva $\varphi(t)$ que pase por p con vector tangente $\dot{\varphi}(0) = v$. Además, para analizar los valores de k_n, basta fijarse en las secciones normales. (Véase la figura 3.7.)

Si una superficie S está definida como la gráfica de una función $z = f(x, y)$ y (x_0, y_0) es un punto crítico de f, entonces la curvatura en un punto (x_0, y_0, z_0) se definió como el producto $K(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1\lambda_2$, donde λ_1 y λ_2 son las raíces del polinomio cuadrático $\det(B - \lambda I)$, donde B es la matriz hessiana de f en el punto crítico (x_0, y_0). Habíamos dicho también que podemos interpretar a la identidad I como la matriz de coeficientes de la primera forma fundamental en el plano tangente a S en (x_0, y_0, z_0), de modo que λ_1 y λ_2 están asociados a la pareja (I, B). En el caso general, el papel de I lo jugará la primera forma fundamental, que denotamos por G. Como las formas fundamentales dependen sólo del punto sobre la superficie, buscaremos una relación de dependencia entre las matrices G y B que nos permita calcular la curvatura en forma alternativa a lo establecido en el teorema 3.13.

Continuando con nuestra analogía, buscaremos valores de λ tales que

$$\det(B - \lambda G) = 0,$$

o bien

$$\left| \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right| = 0$$

o de forma equivalente, los escalares λ que satisfagan el polinomio característico

$$(e - \lambda E)(g - \lambda G) - (f - \lambda F)^2 = 0.$$

En este caso, diremos que λ es un **valor propio** asociado a la pareja (G, B).

Una vez calculados los valores propios λ_1 y λ_2, procedemos a buscar los vectores propios correspondientes; esto es, vectores tales que para cada λ_i se tenga

$$(B - \lambda_i G)\xi_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Ejemplo 3.16. *Consideremos una superficie S de la forma $z = f(x, y)$, parametrizada por*

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

Como

$$\varphi_x = (1, 0, f_x), \quad \varphi_y = (0, 1, f_y),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_x, \varphi_x \rangle = 1, \\ F &= \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle = f_x f_y, \\ G &= \langle \varphi_y, \varphi_y \rangle = 1. \end{aligned}$$

De esta forma, la matriz de coeficientes de la primera forma fundamental en el punto $p = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in S$ *es*

$$\begin{pmatrix} 1 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 \end{pmatrix}.$$

Además, al calcular las segundas derivadas, se obtiene

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= (0, 0, f_{xx}), \\ \varphi_{xy} &= (0, 0, f_{xy}), \\ \varphi_{yy} &= (0, 0, f_{yy}), \end{aligned}$$

y también

$$\varphi_x \times \varphi_y = (-f_x, -f_y, 1)$$

de donde

$$N = \frac{\varphi_x \times \varphi_y}{\|\varphi_x \times \varphi_y\|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Usamos lo anterior para calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned} e &= \langle \varphi_{xx}, n \rangle = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \\ f &= \langle \varphi_{xy}, n \rangle = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \\ g &= \langle \varphi_{yy}, n \rangle = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \end{aligned}$$

Si suponemos que (x_0, y_0) es un punto crítico, de modo que las derivadas parciales $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ se anulan, las matrices de coeficientes de las formas fundamentales en p son

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios asociados resultan ser, como se esperaba, los de la matriz hessiana B. ▷

El ejemplo 3.16 sugiere que la segunda forma fundamental es la generalización natural de la matriz hessiana.

Sea $\{e_1, e_2\}$ una base de T_pS. En tal base se tiene que los vectores ξ_1 y ξ_2 se escriben

$$\xi_1 = \xi_1^2 e_1 + \xi_1^2 e_2 \quad \text{y} \quad \xi_2 = \xi_2^1 e_1 + \xi_2^2 e_2.$$

Más aún, su producto escalar $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_G$ se calcula con facilidad mediante

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_G = \langle G\xi_1, \xi_2 \rangle = \langle G\xi_2, \xi_1 \rangle$$

debido a que

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_G = \xi_2^T G \xi_1 = \xi_1^T G \xi_2.$$

Lema 3.17. *Los vectores propios ξ_1 y ξ_2 son ortogonales con respecto de $\langle\,,\,\rangle_G$ cuando los valores propios λ_1 y λ_2 son diferentes.*

Demostración. ξ_1 y ξ_2 satisfacen las ecuaciones vectoriales

$$(B - \lambda_1 G)\xi_1 = 0 \quad \text{y} \quad (B - \lambda_2 G)\xi_2 = 0.$$

Esto implica que son válidas las ecuaciones escalares

$$\langle (B - \lambda_1 G)\xi_1, \xi_2 \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle (B - \lambda_2 G)\xi_2, \xi_1 \rangle = 0$$

donde $\langle\,,\,\rangle$ es el producto escalar euclidiano. En forma equivalente,

$$\langle B\xi_1, \xi_2 \rangle - \lambda_1 \langle G\xi_1, \xi_2 \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle B\xi_2, \xi_1 \rangle - \lambda_2 \langle G\xi_2, \xi_1 \rangle = 0$$

Al restar miembro a miembro de esta pareja de igualdades, y usar el hecho de que $\langle B\xi_1, \xi_2 \rangle = \langle B\xi_2, \xi_1 \rangle$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_2 \langle G\xi_2, \xi_1 \rangle - \lambda_1 \langle G\xi_1, \xi_2 \rangle = (\lambda_2 - \lambda_1) \langle G\xi_1, \xi_2 \rangle \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_G, \end{aligned}$$

lo que prueba la afirmación. □

La siguiente definición clasifica los puntos de una superficie diferenciable orientable.

Definición 3.18. Sean λ_1 y λ_2 los valores propios asociados a la pareja (G, B) en el punto $p \in S$. Entonces:

a. p es un **punto elíptico** si y sólo si $\lambda_1\lambda_2 > 0$.

b. p es un **punto hiperbólico** si y sólo si $\lambda_1\lambda_2 < 0$.

c. p es un **punto parabólico** si y sólo si $\lambda_1\lambda_2 = 0$ y al menos un $\lambda_i \neq 0$.

d. p es un **punto plano** si y sólo si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

e. p es un **punto umbílico** si y sólo si $\lambda_1 = \lambda_2$.

La figura 3.8 ilustra los tipos de puntos de la definición 3.18.

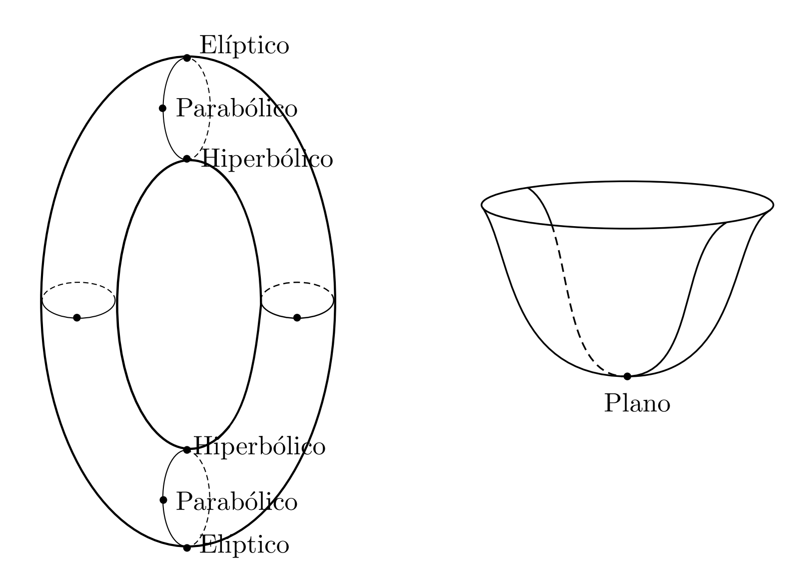


Figura 3.8: Clasificación de puntos sobre una superficie.

Ejemplo 3.19. *Sea $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera unitaria, parametrizada mediante coordenadas co-geográficas. Puesto que las matrices de coeficientes de sus formas fundamentales son*

$$G = \begin{pmatrix} R^2 \operatorname{sen}^2 \theta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} R \operatorname{sen}^2 \theta & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix},$$

la ecuación característica de la pareja (G, B) es

$$\begin{aligned} 0 &= \det(B - \lambda G) = \begin{vmatrix} R \operatorname{sen}^2 \theta - \lambda R^2 \operatorname{sen}^2 \theta & 0 \\ 0 & R - \lambda R^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} R(1 - \lambda R) \operatorname{sen}^2 \theta & 0 \\ 0 & R(1 - \lambda R) \end{vmatrix} = R^2 (1 - \lambda R)^2 \operatorname{sen}^2 \theta. \end{aligned}$$

Esto implica que el polinomio característico tiene una única raíz real repetida, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/R$.

De esta forma, todo punto de la esfera $\mathbb{S}^2$ es umbílico y elíptico. ▷

Ejemplo 3.20. *Sea C el cilindro circular recto de radio $R = 1$, parametrizado localmente por*

$$\varphi(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$$

con $(u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$.

Los coeficientes de las formas fundamentales de C en estas coordenadas son

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que los valores propios de la pareja (G, B) están dados por

$$0 = \det(B - \lambda G) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1 + \lambda),$$

de donde $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1$ para cualquier punto de C.

Por lo tanto, el cilindro no tiene puntos umbílicos y todos sus puntos son parabólicos. ▷

Ejemplo 3.21. *Sea P el plano que pasa por el punto q, paralelo a los vectores ortonormales ξ y η, parametrizado por*

$$\varphi(u, v) = q + u\xi + v\eta.$$

Un cálculo directo prueba que en estas coordenadas

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí que los valores propios asociados a (G, B) *sean iguales a cero. Por lo tanto, todo punto* p *en un plano es umbílico y plano.* ▷

El siguiente resultado puede verse como el puente entre el álgebra lineal y la geometría de las superficies.

Teorema 3.22. *Sean* p *un punto no umbílico de una superficie* S *y* λ_1*,* λ_2*, con* $\lambda_1 \geq \lambda_2$*, los valores propios asociados a la pareja* (G, B) *de formas fundamentales de* S *en* p*. Entonces* λ_1 *y* λ_2 *son las curvaturas máxima y mínima respectivamente, al considerar todas las secciones normales en* p*.*

Demostración. Supongamos que alrededor del punto $p = (x_0, y_0, z_0)$ la superficie S se puede escribir como la gráfica de una función $z = f(x, y)$, con $z_0 = f(x_0, y_0)$. Supongamos además que (x_0, y_0) es un punto crítico de f. El caso general se obtiene mediante la aplicación de una isometría en $\mathbb{R}^3$ (rotación de la superficie y traslación) para que la superficie en cuestión quede en la posición del caso estudiado.

Si $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces B es un múltiplo de la identidad, y es claro que podemos encontrar una base ortonormal de vectores propios.

Por otro lado, si los valores propios de B son distintos, el lema 3.17 garantiza que los vectores propios asociados a la segunda forma fundamental B son ortogonales en la forma usual, pues G es la forma fundamental euclidiana.

De esta forma, podemos aplicar una rotación alrededor del punto (x_0, y_0) para reemplazar el sistema de coordenadas (x, y) por un sistema de coordenadas nuevo (u, v) donde la segunda forma fundamental de f en (x_0, y_0) tome la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Por el teorema 3.13, una sección normal $(u(t), v(t), z(t))$, con parámetro de longitud de arco t, que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) tiene una curvatura dada por

$$k_n = \lambda_1 \dot{u}(0)^2 + \lambda_2 \dot{v}(0)^2.$$

Aquí, $\xi = (\dot{u}(0), \dot{v}(0), 0)$ es el vector tangente a dicha curva en el punto (x_0, y_0, z_0). Como $\dot{u}(0)^2 + \dot{v}(0)^2 = 1$, el ángulo α entre ξ y el eje nuevo u satisface las relaciones trigonométricas

$$\cos^2 \alpha = \dot{u}(0)^2, \quad \operatorname{sen}^2 \alpha = \dot{v}(0)^2.$$

En consecuencia, la curvatura de la sección normal de S en la dirección de ξ es

$$k_n = \lambda_1 \cos^2 \alpha + \lambda_2 \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Esta expresión se llama la **fórmula de Euler**.

Si consideramos k_n como función de α, $k_n = k_n(\alpha)$, podemos usar los métodos básicos del cálculo para ver que esta función restringida a $\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$ alcanza su valor máximo λ_1 en $\alpha = 0$ (dirección de u) y su valor mínimo λ_2 en $\alpha = \pi/2$ (dirección de v). □

Acorde al teorema 3.22, podemos generalizar los conceptos de curvatura introducidos antes para una superficie descrita localmente como la gráfica de una función alrededor de un punto crítico.

Definición 3.23. Los valores propios λ_1 y λ_2 asociados a la pareja (G, B) se llaman las **curvaturas principales** de S en el punto p.

Las direcciones determinadas por los vectores propios ξ_1, ξ_2 asociados respectivamente a λ_1 y λ_2 se llaman las **direcciones principales** en p.

Al producto de las curvaturas principales denotado por

$$K(p) = \lambda_1 \lambda_2$$

se le llama la **curvatura gaussiana** de S en el punto p.

Al promedio de las curvaturas principales denotada por

$$H(p) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

se le llama la **curvatura media** de S en el punto p.

Ahora presentaremos una fórmula para calcular la curvatura gaussiana de una superficie regular S en un punto p en términos de las formas fundamentales.

Teorema 3.24. *La curvatura gaussiana K de una superficie S en un punto $p \in S$ es igual al cociente del determinante de la segunda forma fundamental entre el determinante de la primera forma fundamental:*

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\det B}{\det G}.$$

Demostración. Las curvaturas principales λ_1 y λ_2 son los valores propios asociados a la pareja (G, B); es decir, son raíces del polinomio

$$\det(B - \lambda G) = 0.$$

Como G es definida positiva, entonces es invertible y se cumple la igualdad

$$\det(B - \lambda G) = \det(GG^{-1}B - \lambda G) = \det(G)\det(G^{-1}B - \lambda I).$$

Ya que $\det(B - \lambda G) = 0$ y $\det(G) \neq 0$ entonces

$$\det(G^{-1}B - \lambda I) = 0.$$

Esto nos dice que λ_1 y λ_2 también son valores propios de la matriz $G^{-1}B$. De esta forma, existe un cambio lineal de coordenadas en el plano que lleva la matriz $G^{-1}B$ en una matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

con el mismo determinante que $G^{-1}B$.

Por lo tanto,

$$K = \lambda_1 \lambda_2 = \det(G^{-1}B) = \frac{\det B}{\det G},$$

lo que prueba el teorema. □

Ejemplo 3.25. *Recordemos que las matrices de coeficientes de las formas fundamentales del cilindro C son*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que para un punto arbitrario $p \in C$*,*

$$K(p) = \frac{\det B}{\det G} = \frac{0}{1} = 0.$$

Esto es, la curvatura gaussiana del cilindro es igual a cero para cualquier punto. ▷

Ejemplo 3.26. *Para cualquier punto* $p \in \mathbb{S}^2_R$ *expresado con coordenadas co-geográficas se tiene que*

$$\det G = \begin{vmatrix} R^2 \operatorname{sen}^2\theta & 0 \\ 0 & R^2 \end{vmatrix} = R^4 \operatorname{sen}^2\theta$$

y

$$\det B = \begin{vmatrix} R \operatorname{sen}^2\theta & 0 \\ 0 & R \end{vmatrix} = R^2 \operatorname{sen}^2\theta,$$

lo que implica que

$$K(p) = \frac{\det B}{\det G} = \frac{R^2 \operatorname{sen}^2\theta}{R^4 \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{R^2}$$

es la curvatura en cada punto. ▷

3.5 El teorema egregio de Gauss

En esta sección se demuestra el **teorema egregio de Gauss** que nos dice que la curvatura gaussiana de una superficie es invariante bajo isometrías. Éste es uno de los resultados más importantes de la geometría diferencial, además de que nos da un invariante métrico de una superficie.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientable, parametrizada por $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3$. Recordemos que localmente podemos definir un vector ortogonal al plano T_pS dado por

$$N(p) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(p).$$

En la definición 3.5 llamamos a la transformación $N : S \to \mathbb{S}^2$ que asocia a cada punto $p \in \varphi(\Omega)$ el vector normal $N(p)$ unitario dado por la expresión anterior la **aplicación de Gauss** de S.

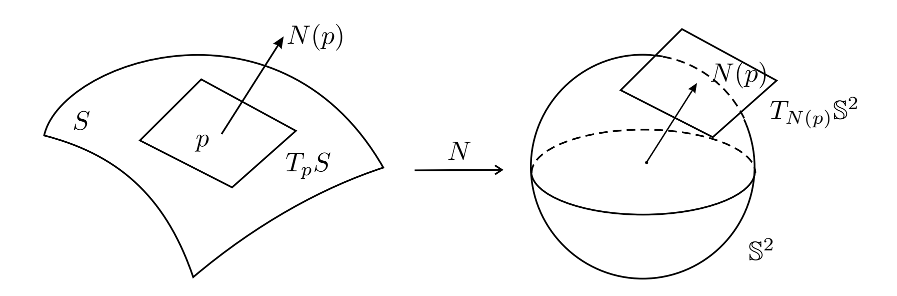


Figura 3.9: La aplicación de Gauss.

Para cada $p \in S$, la diferencial de la aplicación de Gauss $dN_p : T_pS \to T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ es una transformación lineal cuyo codominio es $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$, pero que puede pensarse como

$$dN_p : T_pS \to T_pS$$

ya que T_pS es paralelo a $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$. (Véase la figura 3.9.)

Si N_u, N_v denotan las derivadas parciales de la composición $N \circ \varphi : \Omega \to \mathbb{S}^2$, observamos que tales vectores pertenecen al plano tangente T_pS, pues $N_u = dN(\varphi_u)$ y $N_v = dN(\varphi_v)$. Por lo tanto, existen funciones escalares diferenciables $\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}\}$ que satisfacen

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}\varphi_u + a_{12}\varphi_v, \\ N_v &= a_{21}\varphi_u + a_{22}\varphi_v. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Lema 3.27. *Los coeficientes del sistema (3.4) se calculan mediante las* **ecuaciones de Weingarten**

$$\begin{aligned} a_{11} &= \tfrac{fF-eG}{EG-F^2}, \quad a_{12} = \tfrac{eF-fE}{EG-F^2}, \\ a_{21} &= \tfrac{gF-fG}{EG-F^2}, \quad a_{22} = \tfrac{fF-gE}{EG-F^2}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Demostración. Al derivar las relaciones de ortogonalidad

$$\langle \varphi_u, N \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle \varphi_v, N \rangle = 0$$

respecto a la variable u se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \varphi_u, N\rangle_u = \langle \varphi_{uu}, N\rangle + \langle \varphi_u, N_u\rangle = e + \langle \varphi_u, N_u\rangle \\ 0 &= \langle \varphi_v, N\rangle_u = \langle \varphi_{vu}, N\rangle + \langle \varphi_v, N_u\rangle = f + \langle \varphi_v, N_u\rangle, \end{aligned}$$

lo que indica que $\langle \varphi_u, N_u\rangle = -e$ y $\langle \varphi_v, N_u\rangle = -f$.

Por otro lado, al hacer el producto escalar en la primera de las ecuaciones (3.4) por φ_u y por φ_v obtenemos el sistema de ecuaciones con las incógnitas a_{11} y a_{12} dado por

$$\begin{aligned} -e &= \langle \varphi_u, N_u\rangle = a_{11}\langle \varphi_u, \varphi_u\rangle + a_{12}\langle \varphi_u, \varphi_v\rangle = a_{11}E + a_{12}F \\ -f &= \langle \varphi_v, N_u\rangle = a_{11}\langle \varphi_v, \varphi_u\rangle + a_{12}\langle \varphi_v, \varphi_v\rangle = a_{11}F + a_{12}G \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} -e &= a_{11}E + a_{12}F, \\ -f &= a_{11}F + a_{12}G. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema tenemos

$$a_{11} = \frac{Ff - Ge}{EG - F^2} \quad \text{y} \quad a_{12} = \frac{Fe - Ef}{EG - F^2}$$

De forma análoga se calculan a_{21} y a_{22}. □

Ahora consideremos las derivadas de los vectores φ_u, φ_v y N. Como el conjunto $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$ es una base de $T_p\mathbb{R}^3$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= \Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v + L_1N \\ \varphi_{uv} &= \Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v + L_2N \\ \varphi_{vu} &= \Gamma_{21}^1\varphi_u + \Gamma_{21}^2\varphi_v + L_2'N \\ \varphi_{vv} &= \Gamma_{22}^1\varphi_u + \Gamma_{22}^2\varphi_v + L_3N \end{aligned} \tag{3.6}$$

para alguna familia de números $\{\Gamma_{ij}^k\}$, $i, j, k = 1, 2$, y L_1, L_2, L_2' y L_3. Estos escalares son los coeficientes de los vectores derivadas de $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$ en la base $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$ de $T_p\mathbb{R}^3$.

Definición 3.28. $\{\Gamma_{ij}^k\}$ son los **símbolos** o **coeficientes de Christoffel** de las derivadas de φ_u y φ_v, en la base $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$.

Observación. Como φ es diferenciable (por tanto al menos de clase C^2), se tiene que $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, de donde

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 \quad \text{y} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2;$$

es decir, los símbolos de Christoffel son simétricos en sus subíndices.

Procedemos a calcular las terceras coordenadas de las derivadas de φ_u y φ_v. Para ello, es suficiente calcular el producto escalar de cada una de ellas con el vector N.

Ya que $\langle \varphi_u, N\rangle = \langle \varphi_v, N\rangle = 0$, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} e &= \langle \varphi_{uu}, N\rangle = \langle \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L_1 N, N\rangle \\ &= \langle L_1 N, N\rangle = L_1 \langle N, N\rangle = L_1. \end{aligned}$$

De igual forma, se calculan las terceras coordenadas de las derivadas de $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$ y φ_{vv}, obteniéndose

$$\begin{aligned} f &= \langle \varphi_{uv}, N\rangle = \langle L_2 N, N\rangle = L_2 = L_2', \\ g &= \langle \varphi_{vv}, N\rangle = \langle L_3 N, N\rangle = L_3. \end{aligned}$$

Procedemos ahora a calcular los símbolos de Christoffel por medio del producto escalar con los vectores básicos $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ de T_pS.

Por ejemplo, para la primera coordenada de φ_{uu} se tiene que

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_u\rangle = \Gamma_{11}^1 \langle \varphi_u, \varphi_u\rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \varphi_u, \varphi_v\rangle + e\langle \varphi_u, N\rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F$$

Pero por otro lado,

$$E_u = \frac{\partial}{\partial u}\langle \varphi_u, \varphi_u\rangle = \langle \varphi_u, \varphi_u\rangle_u = \langle \varphi_{uu}, \varphi_u\rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uu}\rangle = 2\langle \varphi_{uu}, \varphi_u\rangle$$

de donde obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{2} E_u = E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2.$$

Para la segunda coordenada de φ_{uu} se tiene la igualdad

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = \Gamma_{11}^1 \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2.$$

Usando el par de ecuaciones

$$F_u = \frac{\partial}{\partial u} \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle$$

y

$$E_v = \frac{\partial}{\partial v} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle = 2\langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle$$

se obtiene la relación

$$F_u = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \frac{1}{2} E_v$$

lo que implica que

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v$$

Por lo tanto, se obtiene la ecuación

$$F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = F_u - \frac{1}{2} E_v.$$

Un procedimiento similar al utilizado para calcular los coeficientes Γ_{ij}^k nos lleva al siguiente teorema.

Proposición 3.29. *Los símbolos de Christoffel quedan determinados por los sistemas de ecuaciones lineales*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 &=& \frac{1}{2} E_u, \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 &=& F_u - \frac{1}{2} E_v, \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{rcl} E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2 &=& \frac{1}{2} E_v, \\ F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 &=& \frac{1}{2} G_u, \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{rcl} E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 &=& F_v - \frac{1}{2} G_u, \\ F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2 &=& \frac{1}{2} G_v. \end{array} \right.$$

Obsérvese que las soluciones Γ_{ij}^k de los sistemas de ecuaciones dadas en la proposición 3.29 dependen sólo de los coeficientes de la primera forma fundamental g_{ij} y de sus primeras derivadas, esto es,

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(E, F, \cdots, E_u, E_v, \cdots).$$

De esta manera, ya que una isometría local entre dos superficies S_1 y S_2 preserva los coeficientes de la primera forma fundamental de S_1, entonces se tiene que ambas superficies tienen localmente los mismos símbolos de Christoffel. Esto implica que todas las propiedades definidas en términos de los Γ_{ij}^k son invariantes bajo isometrías locales.

Más aún, se tiene un resultado central de la geometría diferencial a partir de la última observación. Este resultado fue probado por K. F. Gauss en 1828.

Teorema 3.30 (Egregio de Gauss)**.** *La curvatura gaussiana de una superficie es invariante bajo isometrías locales. Es decir, dos superficies que son localmente isométricas tienen la misma curvatura.*

Demostración. Considérense las siguientes igualdades entre las derivadas de orden 3 de φ en el punto $p \in S$:

$$\begin{cases} (\varphi_{uu})_v(p) = (\varphi_{uv})_u(p) \\ (\varphi_{vv})_u(p) = (\varphi_{vu})_v(p) \\ N_{uv}(p) = N_{vu}(p) \end{cases}$$

De aquí en adelante, omitiremos la evaluación en p. De la primera ecuación y de (3.6) se obtiene que

$$(\Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v + eN)_v = (\Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v + fN)_u$$

lo que implica que

$$\begin{aligned}(\Gamma_{11}^1)_v\varphi_u + \Gamma_{11}^1\varphi_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v\varphi_v + \Gamma_{11}^2\varphi_{vv} + e_vN + eN_v \\ = (\Gamma_{12}^1)_u\varphi_u + \Gamma_{12}^1\varphi_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u\varphi_v + \Gamma_{12}^2\varphi_{uv} + f_uN + fN_u.\end{aligned}$$

Sustituyendo φ_{uv}, φ_{vv}, φ_{uu}, N_u y N_v por las expresiones dadas en la igualdad

(3.6) se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned}(\Gamma_{11}^1)_v\varphi_u + \Gamma_{11}^1(\Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v + fN) + (\Gamma_{11}^2)_v\varphi_v \\ + \Gamma_{11}^2(\Gamma_{22}^1\varphi_u + \Gamma_{22}^2\varphi_v + gN) + e_vN + e(a_{21}\varphi_u + a_{22}\varphi_v) \\ = (\Gamma_{12}^1)_u\varphi_u + \Gamma_{12}^1(\Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v + eN) + (\Gamma_{12}^2)_u\varphi_v \\ + \Gamma_{12}^2(\Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v + fN) + f_uN + f(a_{11}\varphi_u + a_{12}\varphi_v)\end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes del vector básico φ_v nos queda la igualdad

$$\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + ea_{22} = \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 + f\,a_{12},$$

de donde

$$\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)^2 = fa_{12} - e\,a_{22}.$$

Sustituyendo los valores de a_{12} y a_{22} dados por las fórmulas de Weingarten (3.5) en esta última igualdad, se tiene que

$$fa_{21} - ea_{22} = f\frac{eF - fE}{EG - F^2} - e\frac{fF - gE}{EG - F^2} = E\frac{(eg - f^2)}{EG - F^2} = E\frac{\det B}{\det G} = EK.$$

De esta manera, se obtiene que la curvatura gaussiana K satisface la relación

$$K = \frac{\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)^2}{E}.$$

Ahora bien, si dos superficies son localmente isométricas, por la observación anterior al teorema 2.40 sabemos que los coeficientes correspondientes de sus primeras formas fundamentales son iguales y por lo tanto tienen los mismos símbolos de Christoffel, respectivamente. La última igualdad implica que sus curvaturas son iguales. □

Corolario 3.31. *No se puede construir mapa plano alguno que pueda representar en forma isométrica una región de la Tierra.*

Demostración. Esto se debe a que la esfera y el plano tienen diferentes curvaturas. □

Consideremos de nuevo las siguientes igualdades entre las derivadas parciales mixtas de φ y N:

$$\begin{cases} (\varphi_{uu})_v - (\varphi_{uv})_u &= 0, \\ (\varphi_{vv})_u - (\varphi_{vu})_v &= 0, \\ N_{uv} - N_{vu} &= 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación obtuvimos la relación

$$\begin{aligned} &(\Gamma^1_{11})_u\varphi_u + \Gamma^1_{11}(\Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + fN) + (\Gamma^2_{11})_v\varphi_v \\ &\qquad + \Gamma^2_{11}(\Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + gN) + e_vN + e(a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v) \\ &\qquad = (\Gamma^1_{12})_u\varphi_u + \Gamma^1_{12}(\Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + eN) + (\Gamma^2_{12})_u\varphi_v \\ &\qquad\qquad + \Gamma^2_{12}(\Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + fN) + f_uN + f(a_{11}\varphi_u + a_{12}\varphi_v) \end{aligned}$$

Agrupamos las coordenadas con respecto de cada uno de los vectores $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$ y escribimos esta relación en la forma

$$A_1\varphi_u + B_1\varphi_v + C_1N = 0.$$

Como tales vectores forman una base, tenemos que $A_1 = 0$, $B_1 = 0$ y $C_1 = 0$. Al considerar $B_1 = 0$ obtuvimos la igualdad

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{11} + (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - (\Gamma^2_{12})_u - (\Gamma^2_{12})^2 = EK,$$

llamada la **fórmula de Gauss**.

En general, al considerar todas las relaciones se obtienen tres ecuaciones lineales

$$\begin{cases} A_1\varphi_u + B_1\varphi_v + C_1N = 0 \\ A_2\varphi_u + B_2\varphi_v + C_2N = 0 \\ A_3\varphi_u + B_3\varphi_v + C_3N = 0 \end{cases}$$

donde los coeficientes A_i, B_i, C_i se anulan, debido a la independencia lineal de los vectores básicos.

Se puede comprobar que estas ecuaciones llevan no sólo a la fórmula de Gauss, sino además a las relaciones

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} E & E_u & e \\ F & F_u & f \\ G & G_u & g \end{vmatrix} + (EG - 2FF + GE)(e_v - f_u) \\ &\qquad\qquad\qquad - (Eg - 2Ff + Ge)(E_v - F_u) = 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{vmatrix} E & E_v & e \\ F & F_v & f \\ G & G_v & g \end{vmatrix} + (EG - 2FF + GE)(f_v - g_u) \\ - (Eg - 2Ff + Ge)(F_v - G_u) = 0$$

llamadas las ecuaciones de **Peterson-Mainardi-Codazzi**.

Obtuvimos la fórmula de Gauss y las ecuaciones de Peterson-Mainardi-Codazzi asociadas a una superficie parametrizada $S \in \mathbb{R}^3$ a partir de sus dos formas fundamentales. La situación recíproca muestra que estas ecuaciones determinan la geometría intrínseca de la superficie; es decir, existe un resultado análogo al teorema de clasificación de curvas espaciales (teorema fundamental de la teoría de las curvas, teorema 1.43) para superficies. Este resultado es llamado el **teorema fundamental de la teoría de las superficies**, o teorema de Bonnet.

Teorema 3.32 (de Bonnet)**.** *Sean*

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \quad \text{y} \quad e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

dos formas cuadráticas en las coordenadas (u, v), la primera de ellas definida positiva. Si los coeficientes de ambas satisfacen la fórmula de Gauss y las ecuaciones de Peterson-Mainardi-Codazzi, entonces existe una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que la primera de estas formas es su primera forma fundamental y la otra es su segunda forma fundamental. Esta superficie es única salvo isometrías.

La demostración de este resultado se omite. El lector interesado puede revisarla en [9].

3.6 Cálculos con coordenadas isotermas

En el capítulo anterior presentamos el teorema de Bers-Beltrami (teorema 2.49), el cual implica que cada punto de una superficie tiene siempre una vecindad parametrizada por coordenadas isotermas con un factor de conformidad λ. En esta sección calcularemos varios objetos geométricos en función de dicho factor.

Ejemplo 3.33. *Calculamos los símbolos de Christoffel para una superficie arbitraria con coordenadas isotermas* (u, v)*.*

Para este caso, los coeficientes de la primera forma fundamental son $E = \lambda(u, v)$*,* $F \equiv 0$ *y* $G = \lambda(u, v)$*, donde* $\lambda = \lambda(u, v)$ *es el factor de conformidad con la primera forma fundamental plana.*

Las ecuaciones que definen a Γ^i_{jk} *en este caso son*

$$\begin{cases} \lambda\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda_u}{2}, \\ \lambda\Gamma^2_{11} = -\frac{\lambda_v}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda\Gamma^1_{12} = \frac{\lambda_v}{2}, \\ \lambda\Gamma^2_{12} = \frac{\lambda_u}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda\Gamma^1_{22} = -\frac{\lambda_u}{2}, \\ \lambda\Gamma^2_{22} = \frac{\lambda_v}{2}, \end{cases}$$

lo que implica que

$$-\Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \frac{\lambda_u}{2\lambda} \quad \text{y} \quad \Gamma^2_{22} = -\Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \frac{\lambda_v}{2\lambda}.$$

En particular, para la esfera $\mathbb{S}^2_R$ *de radio* R *parametrizada con las coordenadas isotermas* $u = x$*,* $v = y$ *dadas por la proyección estereográfica, el factor de conformidad es*

$$\lambda(x, y) = \frac{4R^2}{(x^2 + y^2 + R^2)^2}$$

de donde

$$\lambda_x = -\frac{16R^2 x}{(x^2 + y^2 + R^2)^3}, \quad \lambda_y = -\frac{16R^2 y}{(x^2 + y^2 + R^2)^3}$$

lo que implica que

$$\frac{\lambda_x}{2\lambda} = -\frac{2x}{x^2 + y^2 + R^2}, \quad \frac{\lambda_y}{2\lambda} = -\frac{2y}{x^2 + y^2 + R^2}.$$

Por lo tanto,

$$-\Gamma^1_{22}(x, y) = \Gamma^1_{11}(x, y) = \Gamma^2_{12}(x, y) = -\frac{2x}{x^2 + y^2 + R^2},$$

y

$$\Gamma^2_{22}(x, y) = -\Gamma^2_{11}(x, y) = \Gamma^1_{12}(x, y) = -\frac{2y}{x^2 + y^2 + R^2}$$

son los símbolos de Christoffel para la esfera. ▷

Destacaremos un importante cálculo en el siguiente resultado.

Teorema 3.34. *Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$, y φ una parametrización local con coordenadas isotermas (u, v). Entonces la curvatura gaussiana está dada por la fórmula*

$$K(u, v) = -\frac{1}{2\lambda(u, v)}\Delta \ln \lambda(u, v),$$

donde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

denota al operador laplaciano.

Demostración. La matriz de coeficientes de la primera forma fundamental de S es

$$\begin{pmatrix} \lambda(u, v) & 0 \\ 0 & \lambda(u, v) \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \lambda(u, v), \quad \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0.$$

Consideremos entonces la base ortonormal en $T_p\mathbb{R}^3$ dada por los vectores

$$e_1 = \frac{\varphi_u}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\varphi_u}{\|\varphi_u\|}, \quad e_2 = \frac{\varphi_v}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\varphi_v}{\|\varphi_v\|}, \quad N = e_1 \times e_2.$$

Escribimos los coeficientes de la segunda forma fundamental como

$$e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle, \quad f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle, \quad g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle.$$

Después, calculamos la curvatura mediante la fórmula del teorema 3.24,

$$K = \frac{\det B}{\det G} = \frac{eg - f^2}{\lambda^2}$$

Ya que $\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \lambda(u, v)$, al derivar cada miembro de esta igualdad respecto a u se obtiene

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \lambda(u, v)}{\partial u} = \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle$$

De manera análoga, al derivar respecto a v, se obtiene

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda(u,v)}{\partial v} = \langle\varphi_{vv}, \varphi_v\rangle = \langle\varphi_{uv}, \varphi_u\rangle.$$

Por último, de la igualdad $\langle\varphi_u, \varphi_v\rangle = 0$, se obtiene, derivando respecto a u y a v,

$$\langle\varphi_{uu}, \varphi_v\rangle + \langle\varphi_u, \varphi_{uv}\rangle = \langle\varphi_{uv}, \varphi_v\rangle + \langle\varphi_u, \varphi_{vv}\rangle = 0.$$

Usaremos estas igualdades para calcular las coordenadas de los vectores φ_{uu}, φ_{uv} y φ_{vv} con respecto de la base $\{e_1, e_2, N\}$.

Calculemos las coordenadas de φ_{uu} con respecto de la base $\{e_1, e_2, N\}$. La primera coordenada está dada por

$$\langle\varphi_{uu}, e_1\rangle = \left\langle\varphi_{uu}, \frac{\varphi_u}{\sqrt{\lambda}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\langle\varphi_{uu}, \varphi_u\rangle = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\frac{\partial\lambda}{\partial u}.$$

De manera análoga, la segunda coordenada es

$$\langle\varphi_{uu}, e_2\rangle = \left\langle\varphi_{uu}, \frac{\varphi_v}{\sqrt{\lambda}}\right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\langle\varphi_u, \varphi_{uv}\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\frac{\partial\lambda}{\partial v}.$$

Por último, la tercera coordenada de φ_{uu} es

$$\langle\varphi_{uu}, N\rangle = e,$$

de modo que las coordenadas de φ_{uu} en la base dada son

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\frac{\partial\lambda}{\partial u}, -\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\frac{\partial\lambda}{\partial v}, e\right).$$

De manera análoga, las coordenadas para los vectores φ_{uv} y φ_{vv} en la base $\{e_1, e_2, N\}$ son

$$\varphi_{uv} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\frac{\partial\lambda}{\partial v}, -\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\frac{\partial\lambda}{\partial u}, f\right)$$

y

$$\varphi_{vv} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\frac{\partial\lambda}{\partial u}, \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\frac{\partial\lambda}{\partial v}, g\right).$$

Un cálculo directo prueba que

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_{vv} \rangle - \langle \varphi_{uv}, \varphi_{uv} \rangle = eg - f^2 - \frac{1}{2\lambda}\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2\right]$$

y si se deriva respecto de u la igualdad

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle$$

se obtiene

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} = \langle \varphi_{uuv}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_{uv}, \varphi_{uv} \rangle$$

pero

$$\langle \varphi_{uuv}, \varphi_v \rangle = \frac{\partial}{\partial v}\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_{uu}, \varphi_{vv} \rangle$$

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial v}\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_{uu}, \varphi_{vv} \rangle + \langle \varphi_{uv}, \varphi_{uv} \rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial v}\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle - (\langle \varphi_{uu}, \varphi_{vv} \rangle - \langle \varphi_{uv}, \varphi_{uv} \rangle) \\
&= \frac{\partial}{\partial v}\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle - \left(eg - f^2 - \frac{1}{2\lambda}\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2\right]\right).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial}{\partial v}\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = \frac{\partial}{\partial v}(-\langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle) = \frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2},$$

con lo que se tiene

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2} - (eg - f^2) + \frac{1}{2\lambda}\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2\right]$$

o en forma equivalente,

$$\begin{aligned}
eg - f^2 &= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2}\right) - \frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2\right]\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left(\Delta\lambda - \frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2\right]\right).
\end{aligned}$$

De esta forma,

$$\frac{eg - f^2}{\lambda^2} = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2\right]\right)$$

Otro cálculo directo prueba que

$$\Delta \ln \lambda = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2\right]$$

de donde

$$K(u,v) = \frac{\det B}{\det G} = \frac{eg - f^2}{(\lambda(u,v))^2} = -\frac{1}{2\lambda(u,v)}\Delta \ln \lambda(u,v),$$

lo que prueba la afirmación. □

Ejemplo 3.35. *Usaremos la primera forma fundamental de* $\mathbb{S}^2_R$ *obtenida mediante la proyección estereográfica (ejemplo 2.48) y el teorema 3.34 para calcular la curvatura de la esfera. Ya que el factor de conformidad con la forma fundamental plana es*

$$\lambda(x,y) = \frac{4R^4}{(R^2 + x^2 + y^2)^2}$$

se tiene

$$\ln \lambda(x,y) = \ln(4R^4) - 2\ln(R^2 + x^2 + y^2)$$

de donde

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial x} = -\frac{4x}{R^2 + x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial x^2} = -\frac{4(R^2 + x^2 - y^2)}{(R^2 + x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial y} = -\frac{4y}{R^2 + x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial y^2} = -\frac{4(R^2 + y^2 - x^2)}{(R^2 + x^2 + y^2)^2}$$

lo que implica que

$$\Delta \ln \lambda = -\frac{8R^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

y en consecuencia,

$$K(x,y) = -\frac{\Delta \ln \lambda}{2\lambda} = -\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(1+x^2+y^2)^2}{4R^4}\left(\frac{-8R^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right) = \frac{1}{R^2}$$

es la curvatura en cualquier punto, misma que ya se había obtenido antes en el ejemplo 3.26. ▷

Ejemplo 3.36. *Calcularemos la curvatura de la catenoide en el punto (u,v) (ver ejemplo 2.47) con la primera forma fundamental dada por*

$$(a^2 \cosh^2 v)\,(\delta_{ij}).$$

Es claro que $\lambda(u,v) = a^2\cosh^2 v$, lo que nos lleva a que

$$\ln\lambda = 2\ln a + 2\ln\cosh v,$$

de donde

$$\frac{\partial \ln\lambda}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \ln\lambda}{\partial u^2} = 0;$$

además,

$$\frac{\partial \ln\lambda}{\partial v} = 2\tanh v, \qquad \frac{\partial^2 \ln\lambda}{\partial v^2} = 2\,\text{sech}^2\, v.$$

En consecuencia,

$$\Delta\ln\lambda = 2\,\text{sech}^2\, v.$$

Por lo tanto, para cada punto $p = (u,v)$ de la catenoide se tiene que

$$K(u,v) = -\frac{1}{2\lambda}\Delta\ln\lambda = -\frac{1}{2a^2\cosh^2 v}(2\,\text{sech}^2\, v) = -\frac{\text{sech}^4\, v}{a^2}$$

es una expresión para la curvatura en el punto p. ▷

Observación. La expresión para la curvatura obtenida en el teorema 3.34 sólo depende de la primera forma fundamental. Esta fórmula proporciona otra demostración del teorema egregio de Gauss, ya que dos superficies localmente isométricas tienen la misma primera forma fundamental.

En esta sección vimos la conveniencia de la existencia de una parametrización isoterma para simplificar los cálculos de los objetos geométricos asociados a una superficie. En las secciones posteriores introduciremos nuevos objetos geométricos y mostraremos cómo estos objetos están asociados a parametrizaciones especiales con diversas e importantes propiedades.

3.7 Curvas asintóticas y líneas de curvatura

Hemos estudiado varios conceptos de curvatura asociados a curvas en una superficie S, uno de los cuales es la curvatura normal (definición 3.14). Utilizaremos esta noción para dar la definición de dirección asintótica.

Definición 3.37. Una **dirección asintótica** en p es aquella en la que la curvatura normal se anula.

Puesto que la curvatura normal no cambia de signo en un punto elíptico, en tales puntos no existen direcciones asintóticas. Por otro lado, es fácil ver que en un punto hiperbólico existen dos direcciones asintóticas linealmente independientes. (¿Por qué?)

Veamos ahora qué ocurre con estas direcciones cerca de un punto hiperbólico p. Por definición, sabemos que la curvatura gaussiana es negativa en p, de modo que por continuidad existe una vecindad de este punto formada sólo por puntos hiperbólicos. Esto nos dice que en cada punto de dicha vecindad tenemos definidas dos direcciones asintóticas. Al elegir una de estas direcciones en cada punto, obtenemos lo que se llama un **campo de direcciones asintóticas**. En la figura 3.10 mostramos tales campos para la superficie definida como la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$.

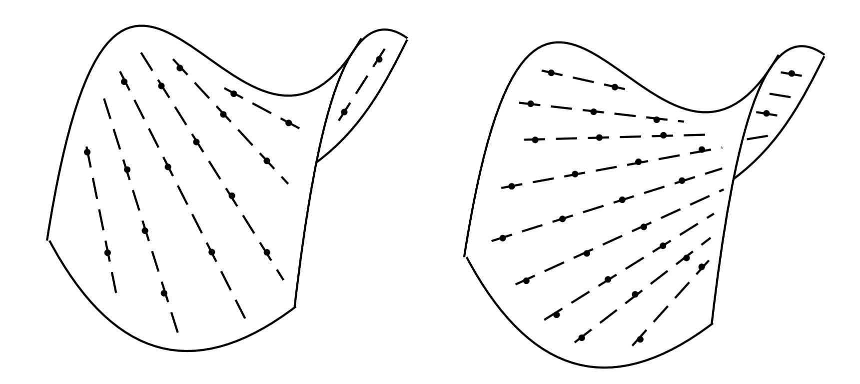


Figura 3.10: Dos campos de direcciones asintóticas en la superficie $z = x^2 - y^2$.

Al observar un campo con estas características, surge una pregunta natural: ¿Existirá una curva tangente en cada punto a una dirección asintótica? Es decir, existirá una curva $\alpha : I \to S$ tal que para cada $t \in I$ ocurra que $\alpha'(t)$ defina una dirección asintótica? Una curva de este tipo es una **curva asintótica**.

Ejemplo 3.38. *Para cualquier punto del plano $\mathbb{R}^2$ y cada dirección $\xi \in T_p\mathbb{R}^2$ se tiene que la curvatura normal se anula, de modo que cualquier dirección es asintótica. En este caso,* cualquier *curva es asintótica. Véase la figura 3.11.* ▷

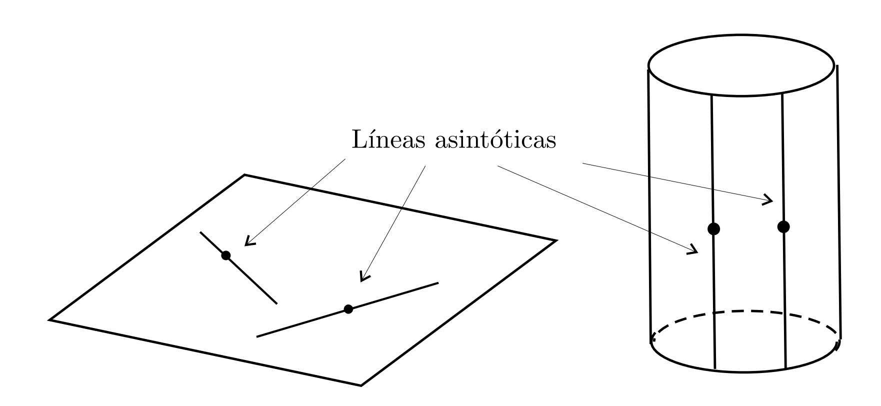


Figura 3.11: Direcciones asintóticas para el plano y el cilindro.

Ejemplo 3.39. *Consideremos el cilindro*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \}.$$

En cada punto $p \in C$ se tiene que la curvatura normal en la dirección vertical se anula. Esto implica que una recta vertical contenida en el cilindro es una curva asintótica.

Podemos generalizar esta situación como sigue: Sea ℓ una recta contenida en una superficie S. Como ℓ tiene curvatura cero, su curvatura normal también se anula. Así, una recta contenida en una superficie siempre es una curva asintótica. ▷

Más adelante volveremos a esta cuestión. Por el momento mencionaremos otros campos de direcciones.

Recordemos (definición 3.1) que en cada punto de una superficie tenemos las curvaturas principales λ_1 y λ_2 y que si $\lambda_1 = \lambda_2$, decimos que p es un *punto umbílico*. Si p no es un punto umbílico, λ_1 y λ_2 se alcanzan en una pareja de direcciones ortogonales (véase el lema 3.17). Un punto no umbílico tiene una vecindad formada por puntos no umbílicos, de modo que a cada punto de dicha vecindad podemos asociarle dos direcciones principales. Al elegir una dirección en cada punto obtenemos lo que se conoce como un **campo de direcciones principales**. En la figura 3.12 vemos un campo de este tipo. (Compare con la figura 3.10.)

De nuevo, la pregunta es si existe una curva tal que en cada punto sea tangente a una dirección principal. Una curva con esta propiedad recibe el nombre de **línea de curvatura**.

Ejemplo 3.40. *Sea S una superficie cuyos puntos sean todos umbílicos. En este caso, las curvaturas principales son iguales y entonces todas las direcciones son principales. En consecuencia, cualquier curva en S es línea de curvatura.* ▷

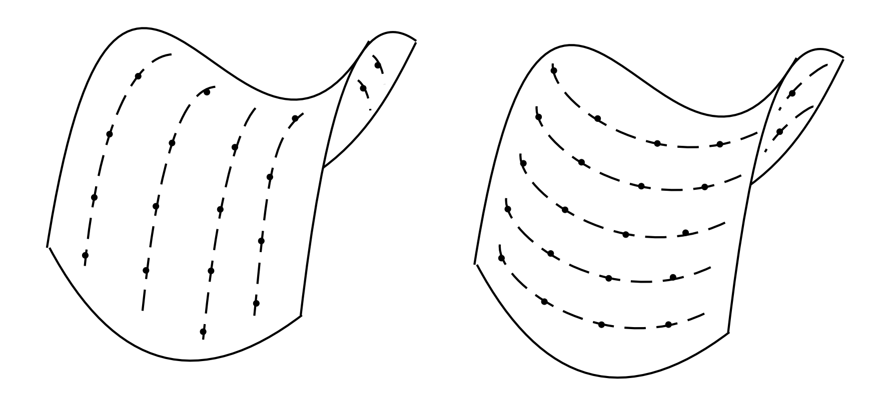


Figura 3.12: Campos de direcciones principales en la superficie $z = x^2 - y^2$.

Los dos casos que hemos mencionado (curvas asintóticas y líneas de curvatura) son casos particulares de un problema general: Se da uno o varios campos de direcciones (en nuestros ejemplos, direcciones asintóticas y

direcciones principales) y se desea determinar una o varias familias de curvas que en cada punto sean tangentes a alguno de estos campos de direcciones.

Para saber bajo qué condiciones puede garantizarse la existencia de tales curvas, es necesario recurrir a la teoría de las ecuaciones diferenciales y los campos vectoriales, que expondremos en la siguiente sección.

3.8 Campos vectoriales

Para nuestros fines, necesitamos que en cada punto p de una superficie quede bien determinada una dirección. Podemos expresar este hecho por medio del concepto de campo vectorial, que establecemos a continuación. Aprovecharemos también para definir las curvas que serán nuestro objeto de estudio.

Definición 3.41. Un **campo vectorial** definido en un subconjunto U de una superficie S es una regla de correspondencia X que a cada punto $p \in U$ le asocia un vector tangente a S en p; en símbolos, $X(p) \in T_pS$. Una **curva integral** asociada a un campo vectorial X es una curva $\alpha : I \to S$ tal que para cada $t \in I$ se tiene que $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$. (Véase la figura 3.13.)

Así, el problema de determinar una curva asintótica se traduce en hallar una curva integral para un campo de direcciones asintóticas, de la misma forma que el problema de determinar una línea de curvatura se traduce en encontrar una curva integral para el campo de direcciones principales. Veremos que la cuestión de existencia de las curvas integrales dado un campo vectorial se puede interpretar como un problema de existencia de soluciones a ecuaciones diferenciales en el plano, de la manera siguiente.

Sea $U \subset S$ un subconjunto de S donde esté definido un campo vectorial X. Supongamos que U es la imagen de un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ bajo una parametrización $\varphi : \Omega \to U$. Podemos usar φ para llevar nuestro problema al plano: Determinar una curva integral α para un campo X definido en $U \subset S$ es equivalente a determinar una curva integral β para un campo Y definido en Ω. En este contexto, las curvas y los campos están relacionados por

$$\alpha = \varphi \circ \beta \quad \text{y} \quad X(p) = d\varphi_q(Y(q)),$$

donde $p = \varphi(q)$. Por lo anterior, de aquí en adelante podemos trabajar en forma directa en el plano.

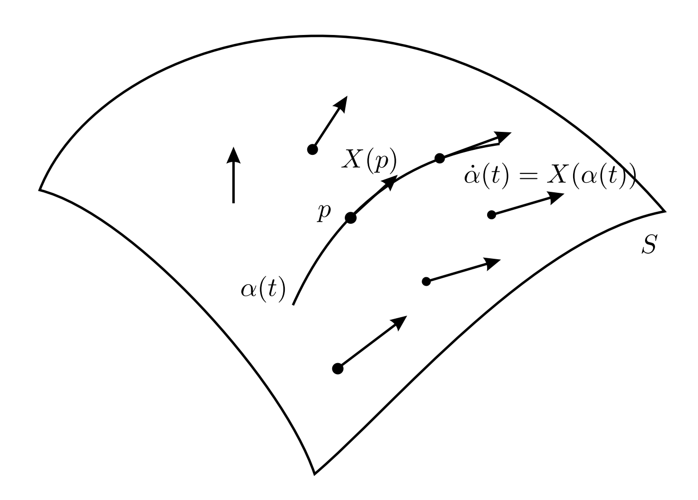


Figura 3.13: Campo vectorial y curva integral en S.

Si $\beta : I \to \Omega$ es una curva integral de un campo Y definido en un abierto Ω, podemos escribir esto en coordenadas como un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}^1(t) &= Y^1(\beta(t)) \\ \dot{x}^2(t) &= Y^2(\beta(t)), \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde $\beta(t) = (x^1(t), x^2(t))$ y $Y = (Y^1, Y^2)$. Así, para determinar una curva integral debemos resolver el sistema (3.7) de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para esto, apelaremos al siguiente teorema, que se puede consultar en [1].

Teorema 3.42 (de unicidad y existencia). *Sea (3.7) un sistema de ecuaciones diferenciales en un abierto Ω del plano, donde las funciones Y^1, Y^2 son continuas. Entonces para cada* condición inicial *dada por una pareja (a^1, a^2) existe un intervalo I que contiene a 0 y dos funciones $x^1, x^2 : I \to \Omega$ tales que $x^1(0) = a^1$, $x^2(0) = a^2$ y $\beta(t) = (x^1(t), x^2(t))$ conforma una solución de (3.7). Esta solución es única en el siguiente sentido: Si $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2) : J \to \Omega$ es otra solución de (3.7) tal que $0 \in J$, $\gamma^1(0) = a^1$ y $\gamma^2(0) = a^2$, entonces $\beta(t) = \gamma(t)$ para todo $t \in I \cap J$.*

El teorema 3.42 resuelve el problema de hallar *una* curva integral. Sin embargo, para fines posteriores requeriremos un resultado más fuerte, que afirma la existencia de una transformación que *colecciona* todas las curvas integrales cerca de un punto dado.

Teorema 3.43 (Flujo de un campo vectorial)**.** *Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales (3.7) en un abierto* Ω *del plano, donde las funciones* Y^1, Y^2 *son continuas. Sea* $q \in \Omega$*. Entonces existe una vecindad* Ω' *de* q*, un intervalo* $I \subset \mathbb{R}$ *que contiene a* 0 *y una transformación*

$$\Phi : I \times \Omega' \to \mathbb{R}^2$$

con las siguientes propiedades:

1. $\Phi(0, u) = u$ *para todo* $u \in \Omega'$.
2. *Si se fija el punto* u*, entonces* $\beta(t) := \Phi(t, u)$ *es una curva integral del sistema (3.7). Por la propiedad anterior,* $\beta(0) = u$.

La demostración de este resultado aparece en [1]. Al fijar t, la transformación Φ del teorema anterior define a su vez una transformación $\Phi_t : \Omega' \to \mathbb{R}^2$ llamada el **flujo** determinado por el campo vectorial Y. (Véase la figura 3.14.)

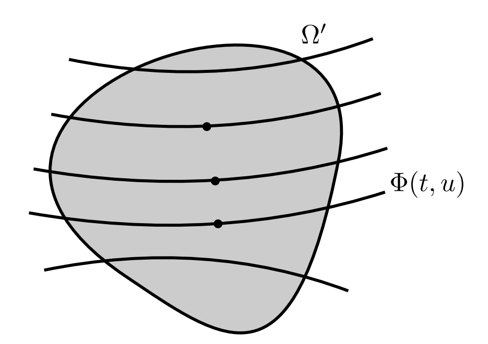


Figura 3.14: Flujo del campo Y en Ω'.

Proposición 3.44. *El flujo* Φ_t *definido arriba tiene las siguientes propiedades:*

1. $\Phi_0(u) = u$.

2. $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$ *para cualesquiera* s, t *reales donde tenga sentido la composición.*

3. Para cada t*,* Φ_t *es invertible.*

Demostración. (1) es sólo una reformulación de la primera propiedad dada en el teorema 3.43.

Para demostrar (2), sean s, t pequeños tales que las curvas

$$\alpha(t) = \Phi_{t+s}(u) \quad \text{y} \quad \beta(t) = \Phi_t(\Phi_s(u))$$

están bien definidas.

Entonces

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\partial}{\partial t}(\Phi_{t+s}(u)) = X(\Phi_{t+s}(u)) = X(\alpha(t))$$

y

$$\dot{\beta}(t) = \frac{\partial}{\partial t}(\Phi_t(\Phi_s(u))) = X(\Phi_t(\Phi_s(u))) = X(\beta(t)),$$

lo que indica que $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son curvas integrales del campo X.

Observemos que ambas pasan por el punto $\Phi_s(u)$ debido a que

$$\alpha(0) = \Phi_{0+s}(u) = \Phi_s(u)$$

y

$$\beta(0) = \Phi_0(\Phi_s(u)) = \Phi_s(u).$$

El teorema 3.42 implica que $\alpha(t) = \beta(t)$ en un intervalo J que contiene a 0. En otras palabras, para $t \in J$,

$$\Phi_{t+s}(u) = \alpha(t) = \beta(t) = \Phi_t(\Phi_s(u)) = \Phi_t \circ \Phi_s(u),$$

lo que prueba la afirmación.

Por último, por la propiedad (2) se tiene que

$$\Phi_t \circ \Phi_{-t} = \Phi_{t+(-t)} = \Phi_0 = \text{Id},$$

lo cual implica que Φ_t es invertible. □

3.9 Parametrizaciones distinguidas

Primero aplicaremos los teoremas de la sección anterior al caso de las curvas asintóticas. Para esto, traduciremos la condición sobre estas líneas ($k_n(\xi) = 0$) al lenguaje de las ecuaciones diferenciales.

Recordemos que el teorema 3.13 nos proporciona una fórmula para la curvatura normal, a saber,

$$k_n(\xi) = e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2,$$

donde $\xi = \dot{u}\varphi_u + \dot{v}\varphi_v$. Así, localmente una curva asintótica satisface la ecuación

$$e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2 = 0, \tag{3.8}$$

llamada la **ecuación diferencial de las curvas asintóticas**.

Recordemos que los puntos elípticos y los puntos planos no son interesantes en este contexto, pues en el primer caso no tenemos direcciones asintóticas, mientras que en el segundo todas las direcciones son asintóticas. Veamos qué ocurre en los otros casos.

Proposición 3.45. *En una vecindad de un punto hiperbólico, la ecuación (3.8) se puede expresar como el producto de dos factores lineales como*

$$(A\dot{u} + B\dot{v})(A\dot{u} + C\dot{v}) = 0. \tag{3.9}$$

Demostración. Supongamos primero que tal factorización existe, de modo que los coeficientes A, B, C deben satisfacer

$$A^2 = e, \quad A(B + C) = 2f, \quad BC = g.$$

Para resolver estas ecuaciones en términos de A, B, C, sustituimos la primera de estas ecuaciones en la segunda. Despejando C en la segunda ecuación y sustituyendo en la tercera obtenemos una ecuación de segundo grado en B, la cual podemos resolver si su discriminante es distinto de cero. En este caso, el discriminante es

$$\frac{f^2}{e} - g,$$

que es distinto de cero en el caso de un punto hiperbólico. Esto termina la demostración. □

Así, cerca de un punto hiperbólico, la ecuación diferencial de las líneas asintóticas es equivalente a la pareja de ecuaciones diferenciales

$$A\dot{u} + B\dot{v} = 0 \quad \text{y} \quad A\dot{u} + C\dot{v} = 0.$$

Corolario 3.46. *En una vecindad de un punto hiperbólico es posible determinar dos familias de curvas tales que cada una de ellas sea una curva asintótica.*

Demostración. Analizaremos lo que ocurre con la ecuación

$$A\dot{u} + B\dot{v} = 0.$$

donde A, B son funciones de (u, v). La ecuación anterior nos dice que el vector $(\dot{u}, \dot{v})$ tangente a una curva asintótica debe ser ortogonal al vector (A, B), de modo que la dirección asintótica queda asociada al vector $(B, -A)$. Definimos así un campo vectorial y utilizamos el teorema 3.42 para concluir la demostración. (Véase la figura 3.15.) □

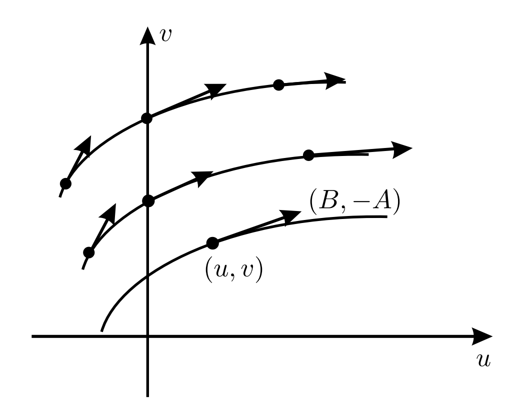


Figura 3.15: Familia de curvas asintóticas.

En el caso de un punto parabólico, tenemos que

$$f^2 - eg = 0,$$

de modo que eg es positivo y ambas cantidades tienen el mismo signo. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $e, g > 0$. Podemos entonces factorizar la ecuación (3.8) de la manera siguiente:

$$0 = e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2 = \left(\sqrt{e}\dot{u} + \sqrt{g}\dot{v}\right)^2 .$$

lo que nos dice que sólo tenemos una dirección asintótica, determinada por el vector $(-\sqrt{g}, \sqrt{e})$, el cual es ortogonal al vector $(\dot{u}, \dot{v})$.

Cuando un punto p es parabólico, ya no podemos garantizar la existencia de una familia de curvas asintóticas en una vecindad de p. Esto se debe a que, a diferencia de los puntos elípticos o hiperbólicos, ya no podemos garantizar la existencia de una vecindad de p formada por puntos parabólicos, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.47. *Sea S la superficie dada como la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^4$.*

La matriz hessiana en un punto (x, y) está dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix},$$

de modo que los puntos del eje x son parabólicos, pero el resto de la superficie está formada por puntos elípticos. ▷

Hemos visto que un punto hiperbólico posee una vecindad tal que por cada punto de ella pasan dos curvas asintóticas. Veremos más adelante que podemos considerar a estas curvas como las curvas *coordenadas* asociadas a una parametrización; es decir, existe un sistema de coordenadas locales (u, v) definido en una vecindad de un punto hiperbólico de modo que las curvas correspondientes a u constante y v constante son curvas asintóticas.

Esta situación es un ejemplo de un caso más general, en que tenemos dos campos vectoriales (o dos campos de direcciones) que en cada punto forman una base del plano tangente a la superficie, como en la figura 3.10. El resultado siguiente nos garantiza que con estos datos podemos construir una parametrización local de la superficie.

Teorema 3.48. *Sean X_1 y X_2 dos campos vectoriales definidos en una región de una superficie S, linealmente independientes en cada punto. Entonces para cada punto de la región existe una vecindad que se puede parametrizar de modo que las curvas coordenadas sean tangentes a las direcciones determinadas por X_1 y X_2.*

Demostración. Sea p un punto cualquiera de la región en cuestión. Aplicando el teorema 3.43 a los campos X_1, X_2, sabemos que existe una vecindad U de p, un intervalo $I = (-\epsilon, \epsilon)$ y transformaciones $\Phi_1, \Phi_2 : I \times U \to S$ tales que $\Phi_i(0, q) = q$ para todo $q \in U$, $i = 1, 2$, de modo que la curva $\Phi_i(t, q)$ (q fijo) es una curva integral del campo X_i, $i = 1, 2$. Consideremos la transformación $\varphi : I \times I \to S$ dada por

$$(t, s) \longmapsto \Phi_2(s, \Phi_1(t, p)).$$

Afirmamos que φ es un difeomorfismo local. Para mostrar esto, calculemos la derivada de φ en $(0, 0)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi_2(0, \Phi_1(t, p))|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\Phi_1(t, p)|_{t=0} = X_1(p).$$

De manera análoga,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, 0) = X_2(p),$$

de modo que la matriz $D\varphi(0, 0)$ tiene rango 2. Por el teorema de la función inversa, φ es un difeomorfismo local y sirve como parametrización de una vecindad de p. De la definición de φ es claro que las curvas coordenadas $u =$ constante y $v =$ constante corresponden a las curvas integrales de los campos X_1, X_2. □

Corolario 3.49. *Sea p un punto hiperbólico de una superficie S. Entonces existe una vecindad de p parametrizada de modo que las curvas coordenadas sean curvas asintóticas.*

Corolario 3.50. *Sea p un punto no umbílico de una superficie S. Entonces existe una vecindad de p parametrizada de modo que las curvas coordenadas sean líneas de curvatura.*

Como tercer corolario del teorema 3.48 mostraremos la existencia de un último tipo de parametrización distinguida.

Definición 3.51. Una parametrización φ de una región en una superficie S es **ortogonal** si en cada punto las curvas coordenadas son ortogonales.

Corolario 3.52. *Sea p un punto arbitrario de una superficie S. Entonces existe una vecindad de p parametrizada de modo que las curvas coordenadas sean ortogonales; es decir, la parametrización es ortogonal.*

Demostración. Sea $\varphi(u,v)$ una parametrización (arbitraria) de una vecindad V de p. Entonces los vectores $\varphi_u(q)$ y $\varphi_v(q)$ son linealmente independientes para cada $q \in U$. Podemos aplicar el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt para obtener una base ortogonal $X_1(q), X_2(q)$ del plano tangente en cada punto de V. Por último, usamos el teorema 3.48 para obtener el resultado. $\square$

Notamos que el corolario 3.52 también se obtiene como consecuencia directa del teorema 2.49, donde la parametrización por coordenadas isotermas $\varphi = \varphi(u,v)$ es tal que $\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 = F$; es decir, $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ es una base ortogonal. Al considerar los campos vectoriales $X_1 = \varphi_u$ y $X_2 = \varphi_v$ y utilizar el teorema 3.48 se concluye la afirmación.

Observación. El uso de parametrizaciones distinguidas como las expuestas en los corolarios anteriores permite simplificar muchos cálculos. Por ejemplo, consideremos el caso de las curvas asintóticas. Recordemos que la ecuación diferencial correspondiente es

$$e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2 = 0.$$

Si una región de una superficie S está parametrizada como en el primero de los corolarios anteriores, entonces la curva $u = u(t) = t$, $v =$ constante, es una curva asintótica y de la ecuación obtenemos que $e = 0$. De manera análoga obtenemos que $g = 0$. El lector puede verificar con facilidad el recíproco de esta situación: Si una parametrización satisface $e = g = 0$, entonces las curvas coordenadas son curvas asintóticas.

3.10 Ejercicios

1. **(Demostración de la no orientabilidad de M^2.)** Considere las parametrizaciones de la banda de Möbius M^2 dadas por

$$\varphi(u,v) = \left(\left(2 - v \operatorname{sen}\frac{u}{2}\right)\operatorname{sen} u,\ \left(2 - v\operatorname{sen}\frac{u}{2}\right)\cos u,\ v\cos\frac{u}{2}\right)$$

donde $(u,v) \in (0,2\pi) \times (-1,1)$, y

$$\widetilde{\varphi}(\tilde{u},\tilde{v}) : \begin{cases} x = \left(2 - \tilde{v}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tilde{u}}{2}\right)\right)\cos\tilde{u}, \\ y = -\left(2 - \tilde{v}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tilde{u}}{2}\right)\right)\operatorname{sen}\tilde{u}, \\ z = \tilde{v}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tilde{u}}{2}\right), \end{cases}$$

definida en $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in (-\pi, \pi) \times (-1, 1)$.

(a) Demuestre que φ y $\widetilde{\varphi}$ cubren a M^2 y que sus imágenes se intersecan en un conjunto no conexo formado por dos componentes $A, B \subset M^2$.

(b) Calcule los cambios de coordenadas en A y B y verifique que los jacobianos respectivos tienen diferente signo.

(c) Concluya de (b) que M^2 no es orientable.

2. Calcule la segunda forma fundamental en cada punto para las superficies dadas.

(a) La superficie de **Enneper** (véase la figura 3.16),

$$\varphi(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right).$$

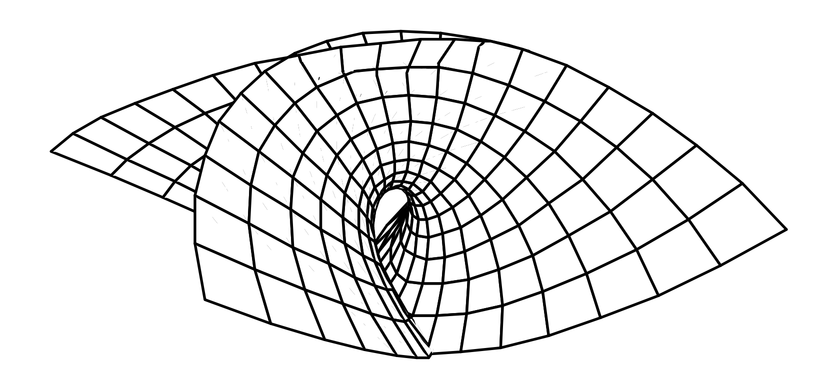


Figura 3.16: Superficie de Enneper.

(b) El paraboloide elíptico,

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

(c) El cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

(d) El paraboloide hiperbólico,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$

(e) El elipsoide circular de revolución,

$$\varphi(\phi, \theta) = (a \cos \phi \operatorname{sen} \theta, a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, c \cos \theta).$$

(f) La superficie "**silla del mono**" (véase la figura 3.17),

$$\varphi(u, v) = (u, v, u^3 - 3v^2 u).$$

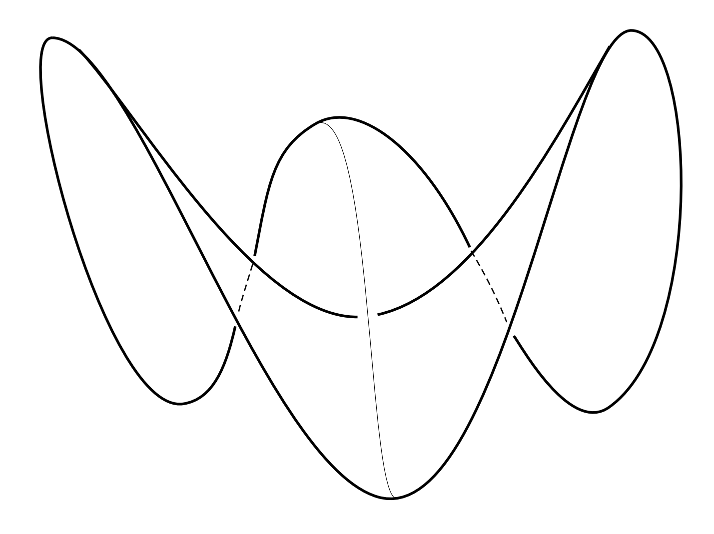


Figura 3.17: Superficie "silla del mono".

3. Para cada una de las superficies del ejercicio 2,

(a) Calcule las curvaturas principales en cada punto. Determine si hay puntos umbílicos.

(b) Calcule la curvatura gaussiana en cada punto y clasifique los puntos de acuerdo con su curvatura.

(c) Dé una expresión para la curvatura media en cada punto.

4. (a) Demuestre que para una esfera de radio R, la curvatura normal en cada punto es

$$k_n = \frac{1}{R}.$$

(b) Calcule la curvatura normal en cada punto del paraboloide hiperbólico $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$.

5. Sea S una superficie tal que sus curvaturas gaussiana y media sean iguales a cero en cada punto. Demuestre que S es un plano.

6. Demuestre que la curvatura media de una superficie S en un punto p está dada por

$$H(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} k_n(\alpha) d\alpha,$$

donde $k_n(\alpha)$ es la curvatura normal en p en una dirección formando un ángulo α con $\varphi_u(p)$.

7. (a) Calcule las curvaturas media y gaussiana de una superficie de la forma

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u) + g(v)).$$

(b) Demuestre que para una superficie del tipo $z = f(x, y)$, la curvatura media en cada punto $p = (x, y, z)$ está dada por

$$H = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla f_p}{\sqrt{1 + \|\nabla f_p\|^2}}\right).$$

(c) Calcule las curvaturas media y gaussiana en un punto arbitrario de una superficie de revolución.

8. Demuestre que las únicas superficies de revolución con curvatura media cero son el plano y la superficie dada por

$$x = \frac{1}{a} \cosh(a\sqrt{y^2 + z^2} + b), \quad a, b > 0,$$

llamada la **superficie de Bolyai**, y que se obtiene al hacer girar la curva $x = \frac{1}{a}\cosh(ay+b)$ alrededor del eje y.

9. (a) (**Fórmula de O. Rodrigues**). Demuestre que una curva conexa $\Gamma \subset S$ es línea de curvatura de S si y sólo si para toda parametrización $\gamma(t)$ de Γ existe una función real diferenciable $\lambda(t)$ tal que si $N(t) = N(\gamma(t))$, entonces

$$\dot{N}(t) = \lambda(t)\dot{\gamma}(t).$$

   (b) Determine las direcciones principales de

$$\varphi(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

   en el punto $(u,v) = (1,1)$ y verifique la fórmula de Rodrigues en cada dirección. Calcule las líneas de curvatura.

   (c) Demuestre que todo punto $p \in S$ que no sea umbílico posee una vecindad en la que existen dos familias ortogonales de líneas de curvatura.

10. Sea S una superficie conexa cuyos puntos son todos umbílicos. Demuestre que S es (parte de) una esfera o un plano.

11. Pruebe que si la curvatura media $H(p) = 0$ en un punto p no plano, entonces este punto tiene dos direcciones asintóticas ortogonales.

12. (Véase el lema 3.27) Calcule los coeficientes de Weingarten de:

   (a) Cualquier superficie de revolución de la forma

$$\varphi(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, g(u)).$$

   (b) El paraboloide circular

$$\varphi(u,v) = (u, v, u^2 + v^2).$$

   (c) El hiperboloide

$$\varphi(u,v) = (u, v, u^2 - v^2).$$

13. Calcule los símbolos de Christoffel de:

(a) El plano en coordenadas cartesianas.

(b) El plano en coordenadas polares.

(c) Cada una de las superficies del problema anterior.

14. Demuestre que la afirmación recíproca del teorema de Gauss es falsa, considerando las superficies

$$\varphi(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, \ln u) \text{ y } \widetilde{\varphi}(\widetilde{u},\widetilde{v}) = (\widetilde{u}\cos\widetilde{v}, \widetilde{u}\operatorname{sen}\widetilde{v}, \widetilde{v}).$$

Pruebe que tienen la misma curvatura, pero no son localmente isométricas.

15. ¿Cuáles de las siguientes superficies son localmente isométricas? Justifique utilizando el teorema egregio de Gauss.

(a) El plano.

(b) La esfera.

(c) El hiperboloide de una hoja.

(d) El elipsoide.

16. Dé una superficie diferenciable tal que los coeficientes de su primera forma fundamental y de su segunda forma fundamental sean

$$\left\{\begin{array}{lcl} E & = & 1, \\ F & = & 0, \\ G & = & \operatorname{sen}^2 u, \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{lcl} e & = & 1, \\ f & = & 0, \\ g & = & \operatorname{sen}^2 u. \end{array}\right.$$

17. Calcule la curvatura media de una superficie parametrizada con coordenadas isotermas.

18. Transforme una primera forma fundamental $ds^2 = dx^2 + f(x)dy^2$ en una expresión del tipo $\lambda(u,v)(du^2 + dv^2)$.

19. (**Beltrami-Enneper**) Demuestre que en cualquier punto p de una línea asintótica que no sea una recta, la torsión $\tau(p)$ satisface que

$$\tau(p) = -K(p).$$

Bibliografía

[1] Arnold, V. I., *Ordinary Differential Equations*, MIT Press, 1978.

[2] Becerril, R., Jardón, R., Reyes, G., *Cálculo diferencial en varias variables*, Pub. CBS, UAM–Iztapalapa, 2002.

[3] do Carmo, M. P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.

[4] Dubrovin, B., Novikov, S. P., Fomenko, A. T., *Geometría moderna: Métodos y aplicaciones*, Parte I, Edit. URSS, 2000.

[5] Dubrovin, B., Novikov, S. P., Fomenko, A. T., *Geometría moderna: Métodos y aplicaciones*, Parte II, Edit. URSS, 2000.

[6] Guillemin V., Pollack A., *Topología diferencial*, Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[7] Lang, S., *Álgebra lineal*, Fondo Educativo Interamericano, 1976.

[8] Marsden, J. E., Hoffman, M. J., *Análisis básico de variable compleja*, Trillas, 1996.

[9] Pogorelov, A. V., *Geometría diferencial*, Editorial Mir, 1977.

[10] Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, 3a. edición, Publish or Perish, 1999.

Índice alfabético

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

Curso de geometría diferencial. Parte 1. Curvas y superficies
se terminó de imprimir el 20 de octubre de 2008
en los talleres de Publidisa Mexicana, S. A. de C. V.
Calz. de Chabacano 69. Col. Asturias
México, 06850, D. F.

El tiro fue de 300 ejemplares

Está impreso en papel cultural de 90 grs.
En su composición se empleó tipo Computer modern
de 11:13.5, 14:16 y 6:18 puntos de pica.